花蓮縣第　65 屆國民中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：庖丁解牛，拆想再猜想－單位分數的續探

關 鍵 詞：單位分數、質因數分解、因數倍數判別

編　　號：

（由教育處統一編列）

製作說明：
1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
2.編號由教育處統一編列。
3.封面編排由參展作者自行設計。

壹、摘要：

本文研究的目的是針對本校學長在中華民國第 45 屆中小學科學展覽會作品－[單位分數的探密]續作探討與改良，以期找出各類更完整具體的表達式(完全用 $\frac{m}{n}$ 中的定數n的表達式)，揚棄未曾學過的 mod(同餘)觀念及電腦程式的輔助工具(48 屆作品)，只用我們所學過的方法與原理(乘法公式、因式分解、除法運算、標準分解式、等差規律、因倍數判定等)與標準分解式計算機作為工具，並引進新的知識、方法與觀念嘗試完成 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 的可能性。

貳、研究的動機：

再次參閱了李毓佩所著的—「不知道的世界(數學篇)」的前兩篇「簡單卻解決不了」後，我們眼光仍佇留於其中的一段敘述：「問題出現：在把一個最簡真分數分成兩個或兩個以上的單位分數之和的上面。比如：

「$\frac{4}{5}$雖然不能分解成兩個單位分數之和，但可以分解成3個單位分數之和，即 $\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$。試問 $\frac{4}{n}$能否都分解成3個單位分數之和？又能否找到$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$所有的表達式呢？」

「1950年，匈牙利數學家愛爾特希猜想：對於每一個正整數 $n\ (n\geq 4)$，方程式 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 一定有正整數解。數學家斯特勞斯(*Strauss*)証明了$n<5000$ 時，愛爾特希的猜想是正確的；1964年，中國數學家柯召也驗証了$n<400000$ 時，愛爾特希的猜想是正確的；數學家法郎希沙因(*Franceschine*)証明了，對於不超過1億的自然數 n時，愛爾特希的猜想是正確的；但是對於任何自然數 n時是否成立的問題還是沒解決。」

於是我就找了幾位同學開始蒐集資料，著手証明推討，遇到困難就隨時請教老師及爸媽。在老師及爸媽的指導下，我們終於解決了一些問題，至於還有些無法解決的問題就要煩請教授們給予指導，不勝感激！

參、研究的目的：

一、探討 0 與 1 之間最簡真分數可表成「有限項」相異「單位分數」之和的理由。

二、透過操作進而找出$\frac{1}{n}$、$\frac{2}{n}$、$\frac{3}{n}$、$\frac{4}{n}$ 的表達式。

三、探討$\frac{4}{n}$ 無法找出固定三項單位分數之和表達式的原因

肆、解釋名詞：

單位分數：

就是指分母為正整數，而分子是"1"的真分數。因為其分子為"1"，所以也被稱為「單分子分數」或「單分數」；又由於最早在埃及的"蘭特紙草書"上發現這種分數，所以也稱為「古埃及分數」。

伍、預備定理：（証明見[附件 1.1]）

(一). 最簡真分數$\frac{m}{n}$都可以表成若干個相異單位分數的和(即$\frac{m}{n}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}+\cdots+\frac{1}{s_{l-1}}+\frac{1}{s_l}$)。

(二). 任何一個最簡真分數$\frac{m}{n}$都可以表成不超過m個相異單位分數的和。

陸、預備知識：

(一). 除法運算規則：利用除法運算，在求單位分數之和時，最好在分子擴大倍數後之值會比原分母大；所以我們會在正常的除法運算後的商再加 "1"或更多 。

例如：$\frac{7}{37}=\frac{7\times 6}{37\times 6}=\frac{37+5}{37\times 6}=\frac{1}{6}+\frac{5}{37\times 6}=\frac{1}{6}+\frac{5\times(3+2)}{37\times 6\times(3+2)}=\frac{1}{6}+\frac{5\times 3}{37\times 6\times(3+2)}+\frac{5\times 2}{37\times 6\times(3+2)}$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{37\times 2}+\frac{1}{37\times 3}$。

(二). 分母因數(合併)法：為了保証拆分之後分子為1，最好能將分子寫成分母因數相加的形式，如此約分後才能保証分子為 "1" 的形式。

例如：$\frac{11}{15}=\frac{15+7}{15\times 2}=\frac{1}{2}+\frac{7}{\underbrace{15}_{有因數5}\times\underbrace{2}_{有因數2}}=\frac{1}{2}+\frac{7\times(5+2)}{15\times 2\times(5+2)}=\frac{1}{2}+\frac{7\times 5}{15\times 2\times(5+2)}+\frac{7\times 2}{15\times 2\times(5+2)}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\times 2}+\frac{1}{15}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{15}$。

如：$\frac{7}{\underbrace{8}_{有因數1,2,4,8}}=\frac{7\times(4+2+1)}{8\times(4+2+1)}=\frac{7\times 4}{8\times(4+2+1)}+\frac{7\times 2}{8\times(4+2+1)}+\frac{7\times 1}{8\times(4+2+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$。(一次到位)

(三). 分母擴倍法：此法為確保除法運算規則與 加大分母因數(合併)法的範圍。

例如：$\frac{41}{67}=\frac{41\times 2}{67\times 2}=\frac{67+15}{67\times 2}=\frac{1}{2}+\frac{15}{67\times 2}=\frac{1}{2}+\frac{15\times 9}{\underbrace{67\times 2\times 9}_{分母擴大9倍}}=\frac{1}{2}+\frac{67\times 2+1}{67\times 2\times 9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{67\times 2\times 9}$。

(註：此法不易找出規律)

(四). "等差階數"定位法：目的在找出$\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+3}$與$\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}$的另一型式的三項單位分數之和的表達式。我們沿用除法運算規則，得知在：

$(I).\ \frac{4}{n}=\frac{4}{4k+3}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n(k+1)}=\frac{1}{k+2}+\frac{5}{n(k+2)}=\frac{1}{k+3}+\frac{9}{n(k+3)}=\frac{1}{k+4}+\frac{13}{n(k+4)}$

$=\frac{1}{k+5}+\frac{17}{n(k+5)}=\frac{1}{k+6}+\frac{21}{n(k+6)}=\cdots\cdots\frac{4}{n}=\frac{1}{k+p}+\frac{4p-3}{n\times(k+p)}$;

[說明]：在$\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+3}$時，$\because n=4k+3$，$\therefore k=\frac{n-3}{4}$，$k+1=\frac{n-3}{4}+1=\frac{n+1}{4}$，$k+2=\frac{n+5}{4}$;

又$\frac{4}{n}=\frac{4(n+1)}{n(n+1)}=\frac{n+1}{\frac{n(n+1)}{4}}=\frac{n}{n\cdot\frac{n+1}{4}}+\frac{1}{n\cdot\frac{n+1}{4}}=\frac{1}{\frac{n+1}{4}}+\frac{1}{n\cdot\frac{n+1}{4}}$

$$=\frac{1}{\frac{4k+3+1}{4}}+\frac{1}{n\cdot\frac{4k+3+1}{4}}=\frac{1}{\frac{4(k+1)}{4}}+\frac{1}{n\cdot\frac{4(k+1)}{4}}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n\times(k+1)}\text{。}$$

同理:$\frac{4}{n}=\frac{4(n+5)}{n(n+5)}=\frac{n+5}{\frac{n(n+5)}{4}}=\frac{n}{n\times\frac{(n+5)}{4}}+\frac{5}{n\times\frac{(n+5)}{4}}=\frac{n}{n\times(k+2)}+\frac{5}{n\times(k+2)}$

$=\frac{1}{k+2}+\frac{5}{n\times(k+2)}$。依此類推$\Rightarrow\cdots\cdots\cdots\cdots\Rightarrow$

$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+p}+\frac{4p-3}{n\times(k+p)}=\frac{1}{k+p}+\frac{4(p-1)+1}{n\times(k+p)}=\frac{1}{k+p}+\frac{4p'+1}{n\times(k+p)}$。(註:$p'=p-1$)

如此會形成次分子為:

$1\to5\to9\to13\to17\to21\to25\to29\to33\to37\to41\to45\to\cdots\to(4p'+1)$的首項為1,公差為4的等差數列。我們將這些由「次項分子數」所組成的等差數,暫稱為"等差階數(I)型"。

$\because\frac{4}{n}=\frac{4\times(k+p)}{n\times(k+p)}=\frac{4k+4p}{n\times(k+p)}=\frac{(4k+3)+(4p-3)}{n\times(k+p)}=\frac{n+(4p-3)}{n\times(k+p)}$,

又$\because$ $n+(4p-3)=n+(4p'+1)$ 必為4的倍數,$\therefore$我們設$k+p=x$,

則$\frac{4}{n}=\frac{n+(4p-3)}{n\times(k+p)}=\frac{n+(4p-3)}{n\times x}=\frac{n+(4p'+1)}{n\times x}$,逆推可得$x$,即可定位$(k+p)$; 例如:

$$\frac{4}{\underbrace{119}_{\substack{119\text{為}4k+3\\119=7\times17\\17\text{為}4p'+1\text{的等差階數}}}}=\frac{119+17}{119\times x}(\because17\text{ 為 }4p'+1\text{的等差階數}(I)\text{型},\ \therefore x=\frac{119+17}{4}=34)$$

故 $\frac{4}{119}=\frac{4\times34}{119\times34}=\frac{119+17}{119\times34}=\frac{1}{34}+\frac{17}{119\times34}=\frac{1}{34}+\frac{1}{7\times34}$(代入公式(1))

$=\frac{1}{34}+\frac{1}{7\times34}+\frac{1}{(7\times34)\times(7\times34+1)}$。[等差階數($I$)型定位法]

(但上述之法顯然不如後敘(公式(5.2)) $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+3}=\frac{1}{\frac{n+5}{4}}+\frac{1}{\frac{n+1}{4}\times\frac{n+5}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+1}{4}}$,

來得明確快速;不過它是另一種三項單位分數之和的表達式。)

(II). $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}=\frac{1}{k+3}+\frac{11}{n(k+3)}=\frac{1}{k+4}+\frac{15}{n(k+4)}$

$=\frac{1}{k+5}+\frac{19}{n(k+5)}=\frac{1}{k+6}+\frac{23}{n(k+6)}=\cdots\cdots$,(等差階數 ($II$) 型)

[說明]:在$\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}$時,$\because n=4k+1,\therefore k=\frac{n-1}{4}$;$k+1=\frac{n+3}{4}$;$k+2=\frac{n+7}{4}$;$k+3=\frac{n+11}{4}$;

又$\frac{4}{n}=\frac{4(n+3)}{n(n+3)}=\frac{n+3}{\frac{n(n+3)}{4}}=\frac{n+3}{n\times\frac{(n+3)}{4}}=\frac{n+3}{n\times\frac{(n-1+4)}{4}}=\frac{n+3}{n\times(\frac{n-1}{4}+1)}$

故$\dfrac{n+3}{n\times(\dfrac{n-1}{4}+1)}=\dfrac{n+3}{n\times(k+1)}=\dfrac{n}{n\times(k+1)}+\dfrac{3}{n\times(k+1)}=\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{3}{n\times(k+1)}$。

同理:$\dfrac{4}{n}=\dfrac{4(n+7)}{n(n+7)}=\dfrac{n+7}{\dfrac{n(n+7)}{4}}=\dfrac{n+7}{n\times\dfrac{(n+7)}{4}}=\dfrac{n+7}{n\times\dfrac{(n-1+8)}{4}}=\dfrac{n+7}{n\times(\dfrac{n-1}{4}+2)}$

$=\dfrac{n}{n\times(k+2)}+\dfrac{7}{n\times(k+2)}=\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{7}{n\times(k+2)}$。　　依此類推,

可得$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k+3}+\dfrac{11}{n\times(k+3)}\Rightarrow\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k+4}+\dfrac{15}{n\times(k+4)}\Rightarrow\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k+5}+\dfrac{19}{n\times(k+5)}$

$\Rightarrow\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k+6}+\dfrac{23}{n\times(k+6)}\Rightarrow\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k+7}+\dfrac{27}{n\times(k+7)}\Rightarrow\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k+8}+\dfrac{31}{n\times(k+8)}$

$\Rightarrow\cdots\cdots\cdots\cdots\Rightarrow\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k+p}+\dfrac{4p-1}{n\times(k+p)}=\dfrac{1}{k+p}+\dfrac{4p'+3}{n\times(k+p)}$。(註:$p'=p-1$)。

如此會形成:

$3\rightarrow7\rightarrow11\rightarrow15\rightarrow19\rightarrow23\rightarrow27\rightarrow31\rightarrow35\rightarrow39\rightarrow43\rightarrow47\rightarrow\cdots\rightarrow(4p'+3)$

的首項為3,公差為4的等差數列。我們將這些由「次項分子數」: 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43,……,$(4p'+3)$的等差數列的各項數也暫稱為"等差階數(II) "。而其類型暫訂為「等差階數(II)型」。(後敘用到很多)

我們也可比照「等差階數(I)型」的定位法,找到另一種將$\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{4k+1}$化成三項單位分數之和的表達式。

例如:$\dfrac{4}{\underbrace{361}_{\substack{361=19^2,361=4k+1,\\19為4p'+3的等差階數(II)型}}}$($\because$19為$4p'+3$的等差階數$(II)$型, $\therefore x=\dfrac{361+19}{4}=95$)

$=\dfrac{4\times95}{361\times95}=\dfrac{361+19}{361\times95}=\dfrac{1}{95}+\dfrac{19}{361\times95}=\dfrac{1}{95}+\dfrac{1}{361\times5}=\dfrac{1}{95}+\dfrac{1}{361\times5+1}+\dfrac{1}{361\times5\times(361\times5+1)}$

(但也顯然不如後敘使用分解+(公式(5.2)) :$\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{4k+3}=\dfrac{1}{\dfrac{n+5}{4}}+\dfrac{1}{\dfrac{n+1}{4}\times\dfrac{n+5}{4}}+\dfrac{1}{n\times\dfrac{n+1}{4}}$,

來得快速;不過它也是另一種三項單位分數之和的表達式。)

即:$\dfrac{4}{\underbrace{361}_{\substack{=19^2,\\19為4k+3}}}=\dfrac{1}{19}\times\dfrac{4}{19}=\dfrac{1}{19}\times(\dfrac{1}{\dfrac{19+5}{4}}+\dfrac{1}{\dfrac{19+1}{4}\times\dfrac{19+5}{4}}+\dfrac{1}{19\times\dfrac{19+1}{4}})=\dfrac{1}{19}\times(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5\times6}+\dfrac{1}{19\times5})$

$=\dfrac{1}{114}+\dfrac{1}{570}+\dfrac{1}{19^2\times5}$。

亦即在$\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{4k+3}$時,若$n$標準分解式中,凡含有質因子$4p'+1$時,都可使用「等差階數$(I)$型定位法」來完成三項單位分數之和的表達式,只是其不如$n=4k+3$時,用公式(5.2),直接將其化成三項 單位分數之和的表達式,來得理想。

同理:在$\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{4k+1}$時,若$n$標準分解式中,只有含質因子$4p'+3$時,才可使用「等差階數定位法$(II)$型」來完成三項單位分數之和的表達式。

(五). 餘數湊整法:

例如:$\dfrac{4}{673}=\dfrac{4\times 171}{\underbrace{673}_{673\div 11=61\cdots 2}\times\underbrace{171}_{\text{含因數}9,\,9\div 11=0\cdots 9}}=\dfrac{673+11}{673\times 171}=\dfrac{1}{171}+\dfrac{11}{673\times 171}=\dfrac{1}{171}+\dfrac{11\times(673+9)}{673\times 171\times(673+9)}$

$$=\frac{1}{171}+\frac{11\times 673}{673\times 171\times(673+9)}+\frac{11\times 9}{673\times 171\times(673+9)}=\frac{1}{171}+\frac{1}{171\times 62}+\frac{1}{673\times 19\times 62}。$$

[註:有無更便捷的方法?見後敘公式(15)]

(六). 完全平方法:用於分母$n=(4p'+3)^2$時,$\because 4p'+3$為"(II)型等差階數",所以,我們可在得到"等差階數"後再逆推出分母擴張的倍數,即可推得$\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{(4p'+3)^2}$時的三項單位分數之和的表達式。

而利用"等差階數"的逆推與完全平方和公式,可推得:(只適用於$\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{(\underbrace{4p'+3}_{\text{等差階數}})^2}$的表達式)

[說明]:

$$\frac{4}{n}=\frac{4}{(\underbrace{4p'+3}_{\text{等差階數}})^2}=\left(\frac{2}{(4p'+3)}\right)^2=\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2=4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}\right)^2$$

$$=4\cdot\left(\frac{1}{(\sqrt{n}+1)^2}+2\times\frac{1}{\sqrt{n}+1}\times\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}+\frac{1}{\sqrt{n}^2(\sqrt{n}+1)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\frac{(\sqrt{n}+1)^2}{4}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)^2}{8}}+\frac{1}{\frac{n\times(\sqrt{n}+1)^2}{4}}。$$

故 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{(\underbrace{4p'+3}_{\text{等差階數}})^2}$的表達式為$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{\frac{(\sqrt{n}+1)^2}{4}}+\dfrac{1}{\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)^2}{8}}+\dfrac{1}{\frac{n\times(\sqrt{n}+1)^2}{4}}$。

例如:$\dfrac{4}{\underbrace{361}_{=19^2,\ 19\text{為等差階數}(II)\text{型}}}=\dfrac{1}{\frac{(\sqrt{361}+1)^2}{4}}+\dfrac{1}{\frac{\sqrt{361}(\sqrt{361}+1)^2}{8}}+\dfrac{1}{\frac{361\times(\sqrt{361}+1)^2}{4}}$

$$=\frac{1}{\frac{20^2}{4}}+\frac{1}{\frac{19\times 20^2}{8}}+\frac{1}{\frac{361\times 20^2}{4}}=\frac{1}{100}+\frac{1}{19\times 50}+\frac{1}{19^2\times 100}。$$

(但也顯然不如後敘使用分解+(公式(5.2)) : $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+3}=\frac{1}{\frac{n+5}{4}}+\frac{1}{\frac{n+1}{4}\times\frac{n+5}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+1}{4}}$,

來得快速;不過它也是另一種三項單位分數之和的表達式。)

柒、研究過程與方法:

第一部分: $\frac{1}{n}$ 、 $\frac{2}{n}$ 表達式的研究:(此一部分延續 45屆,作某些修正改良補述)

延續學長的45屆作品(見附件1.2),我們得知:

$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ …… (公式(1.1)), $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+\frac{n^2}{k}}$ …… (公式(1.2))

與 $\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n+k}{m}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{m}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ …… (公式(1.3))。

亦可得符合 $k<n,\frac{n^2}{k},\frac{n+k}{m},\frac{n+\frac{n^2}{k}}{m}$ 為正整數時,最簡真分數 $\frac{m}{n}$ 的所有兩項表達式。

例如: 最簡真分數 $\frac{4}{21}$ 中,$\because n^2=441=1\times441=3\times147=7\times63=9\times49$,而不大於 21為441的正因數有1,3,7,9,21等五種,

$$\therefore \frac{4}{21}=\frac{1}{\frac{21+1}{4}}+\frac{1}{\frac{21+\frac{21^2}{1}}{4}} \quad (\frac{21+1}{4}\text{不為整數,故不成立})$$

$$=\frac{1}{\frac{21+3}{4}}+\frac{1}{\frac{21+\frac{21^2}{3}}{4}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{42} \quad \cdots\cdots (i)$$

$$=\frac{1}{\frac{21+7}{4}}+\frac{1}{\frac{21+\frac{21^2}{7}}{4}}=\frac{1}{7}+\frac{1}{21} \quad \cdots\cdots (ii)$$

$$=\frac{1}{\frac{21+9}{4}}+\frac{1}{\frac{21+\frac{21^2}{9}}{4}} \quad (\text{但}\frac{21+9}{4}\text{不為整數,故不成立})$$

但我們也因此得到[預備知識(二)]中的「分母因數合併法」的原理(運算更簡捷)。[即分母正因數和等於分子的倍數]操作如下:

亦即:最簡真分數 $\frac{4}{21}$ 中,不大於 21 的正因數有 $1,3,7,9,21$ 等五種,

$$\therefore \frac{4}{21}=\frac{4\times(7+1)}{21\times(7+1)}=\frac{4\times7}{21\times(7+1)}+\frac{4\times1}{21\times(7+1)}=\frac{1}{6}+\frac{1}{42} \cdots\cdots (i)$$

$$\frac{4}{21}=\frac{4\times(3+1)}{21\times(3+1)}=\frac{4\times3}{21\times(3+1)}+\frac{4\times1}{21\times(3+1)}=\frac{1}{7}+\frac{1}{21} \cdots\cdots (ii)$$

$$\frac{4}{21}=\frac{4\times(21+3)}{21\times(21+3)}=\frac{4\times21}{21\times(21+3)}+\frac{4\times3}{21\times(21+3)}=\frac{1}{6}+\frac{1}{42}(\text{與}(i)\text{同型})$$

又從公式(3)中,我們得知只要符合 $k<n, k$ 為 n^2 之因數且 $\frac{n^2}{k},\frac{m+k}{m},\frac{n+\frac{n^2}{k}}{m}$ 為整數時,都可將 $\frac{m}{n}$ 化成兩相異單位分數之和,且其表達式為:$\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{m+k}{m}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{m}}$。

然而上述的表達式只可適用於 $\frac{m}{n}$ 表成兩個相異單位分數之和的方法,並不符合本文所要探討 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 的主題。

又最簡真分數 $\frac{2}{n}$ 是否一定可以表成兩個相異單位分數之和?若可,又其所有能表成兩個相異單位分數之和的表達式又為何呢?

由於 $\frac{2}{n}$ 為最簡真分數,$\therefore$ n 必不為偶數(即 n 為奇數),故 $n+1$ 必為 2 的倍數,又因 1 為 n 之因數,

因此只要取 $m=2, k=1$ 代入公式(3) $\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n+k}{m}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{m}}$ 中,得 $\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{1}}{2}}=\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n+n^2}{2}}$,

故最簡真分數 $\frac{2}{n}$ 一定可表成兩個相異單位分數之和。

且其表達式為:$\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n+n^2}{2}}$。………… 公式(2)

例如:$\frac{2}{3}=\frac{1}{\frac{3+1}{2}}+\frac{1}{\frac{3^2+3}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$。

當然我們也可用「分母因數合併法」得到: $\frac{2}{3}=\frac{2\times(3+1)}{3\times(3+1)}=\frac{2\times3}{3\times(3+1)}+\frac{2\times1}{3\times(3+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$。

第二部分:$\frac{3}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ (x<y<z)$ 表達式的研究

如:最簡真分數 $\frac{m}{n}=\frac{3}{7}$ 中,使用「分母因數合併法」做嘗試,由於不大於 7 的因數只有1與7,但 $1+7=8$ 不會是分子3的倍數,所以 $\frac{3}{7}$ 不能分解成兩個相異「單位分數」之和。然依[預備定理(二)]得知 $\frac{3}{n}$ 一定可以分解成不超過3個單位分數之和,所以 $\frac{3}{7}$ 是可以等於 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$。

於是我們對最簡真分數 $\frac{3}{n}(n>3)$ 展開以下的研究:

首先,我們將分母 n 分成(A). $n=3t+2$ (即n為3的倍數餘2) (B). $n=3t+1$ (即n為3的倍數餘1)等兩部分討論:

(A). 若 $n=3t+2$ 時,$\because \frac{3}{n}(n>3)=\frac{3}{3t+2}=\frac{3(3t+3)}{(3t+2)(3t+3)}=\frac{3[(3t+2)+1]}{(3t+2)(3t+3)}$

$$=\frac{3(3t+2)}{(3t+2)(3t+3)}+\frac{3\times1}{(3t+2)(3t+3)}=\frac{3}{3(t+1)}+\frac{3\times1}{3(3t+2)(t+1)}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(3t+2)(t+1)}$$

$$=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{n(t+1)}=\frac{1}{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{n\times\frac{n+1}{3}}\text{。}(\because\ n=3t+2,\ \therefore\ t+1=\frac{n+1}{3})\quad\cdots\cdots\ \text{公式(3)}$$

(當然代入公式(1)可以化成三項單位分數之和啦!)

例如:$\frac{3}{11}=\frac{1}{\frac{11+1}{3}}+\frac{1}{11\times\frac{11+1}{3}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{44}$。 $\frac{3}{47}=\frac{1}{\frac{47+1}{3}}+\frac{1}{47\times\frac{47+1}{3}}=\frac{1}{16}+\frac{1}{752}$。

(B). 若 $n=3t+1$ 時,又分 n 為偶數與奇數兩部分:

(1). 當 $n=3t+1$ 且 n 為偶數時:則依「奇偶性質」,知 t 為奇數,$\therefore t+1$ 為偶數,

又 $\because \frac{3}{n}(n>3)=\frac{3}{3t+1}=\frac{3(t+1)}{(3t+1)(t+1)}=\frac{3t+3}{(3t+1)(t+1)}=\frac{(3t+1)}{(3t+1)(t+1)}+\frac{2}{(3t+1)(t+1)}$

$$=\frac{1}{t+1}+\frac{2}{(3t+1)(t+1)}=\frac{1}{t+1}+\frac{2}{n(t+1)}=\frac{1}{\frac{n+2}{3}}+\frac{1}{n\times\frac{n+2}{6}}\text{。}\quad\cdots\cdots\ \text{公式(4.1)}$$

$$(\because\ n=3t+1,\ \therefore\ t+1=\frac{n+2}{3})$$

(當然代入公式(1)可以化成三項單位分數之和啦!)

例如:$\frac{3}{10}=\frac{1}{\frac{10+2}{3}}+\frac{1}{10\times\frac{10+2}{6}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{20}$。 $\frac{3}{46}=\frac{1}{\frac{46+2}{3}}+\frac{1}{46\times\frac{46+2}{6}}=\frac{1}{16}+\frac{1}{368}$。

(2). 當 $n=3t+1$ 且為奇數時:則 t 為偶數,$\therefore$ $t+1$ 為奇數,又 $n+1$ 為偶數,

又 $\because \frac{3}{n}(n>3)=\frac{3}{3t+1}=\frac{3(t+1)}{(3t+1)(t+1)}=\frac{3t+3}{(3t+1)(t+1)}=\frac{(3t+1)}{(3t+1)(t+1)}+\frac{2}{(3t+1)(t+1)}$

$=\frac{1}{t+1}+\frac{2}{(3t+1)(t+1)}=\frac{1}{t+1}+\frac{2}{n(t+1)}$, 而 n 必有因數 "1",

$$\therefore \frac{3}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{2}{n(t+1)}=\frac{1}{t+1}+\frac{2\times(n+1)}{n(t+1)\times(n+1)}=\frac{1}{t+1}+\frac{2\times n}{n(t+1)\times(n+1)}+\frac{2\times 1}{n(t+1)\times(n+1)}$$

$$=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)\times\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{n(t+1)\times\frac{n+1}{2}}=\frac{1}{\frac{n+2}{3}}+\frac{1}{\frac{n+2}{3}\times\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{n\times\frac{n+2}{3}\times\frac{n+1}{2}}。$$

$$(\because\ n=3t+1,\therefore\ t+1=\frac{n+2}{3})\qquad\cdots\text{公式(4.2)}$$

例如: $\frac{3}{7}=\frac{1}{\frac{7+2}{3}}+\frac{1}{\frac{7+2}{3}\times\frac{7+1}{2}}+\frac{1}{7\times\frac{7+2}{3}\times\frac{7+1}{2}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{7\times 3\times 4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{84}$。

至此,我們利用「預備知識中的(一)(二)」也完成了 $\frac{3}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 的表達式。

第三部分: $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ (x<y<z)$ 表達式的研究:

(A).若 $n=4k$ 或 $n=4k+2=2(2k+1)$時, 則 $\frac{4}{n}$ 不為最簡真分數,故不予討論。

(B).若 $n=4k+3$ 時, 則 $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+1}{4}}$。…… 公式(5.1) [說明如下]

(當然也就可以化成三項單位分數之和啦!)

[說明]: $\because \frac{4}{n}(n>4)=\frac{4}{4k+3}=\frac{4(k+1)}{(4k+3)(k+1)}=\frac{4k+4}{(4k+3)(k+1)}=\frac{4k+3}{(4k+3)(k+1)}+\frac{1}{(4k+3)(k+1)}$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(4k+3)(k+1)}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n(k+1)},\ \text{又}\because k+1=\frac{n+1}{4},$$

$$\therefore\ \frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+1}{4}}。$$ [等差階數(I)型]

例如: $\frac{4}{11}(n=11)=\frac{1}{\frac{11+1}{4}}+\frac{1}{11\times\frac{11+1}{4}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{33}$(再代入公式(1)) $=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{33}$。

或: $\frac{4}{11}(n=11)=\frac{1}{\frac{11+1}{4}}+\frac{1}{11\times\frac{11+1}{4}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{33}$(再代入公式(1)) $=\frac{1}{3}+\frac{1}{34}+\frac{1}{33\times 34}$。

又經同學們研究討論後,得到恆等式: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+5}{4}}+\frac{1}{\frac{n+1}{4}\times\frac{n+5}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+1}{4}}$。…… 公式(5.2)

例如: $\frac{4}{11}(n=11)=\frac{1}{\frac{11+5}{4}}+\frac{1}{\frac{11+1}{4}\times\frac{11+5}{4}}+\frac{1}{11\times\frac{11+1}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{33}$。

[這不也與等差階數(I)型不謀而合嗎!]

[証明]:

$$\because \frac{4}{n}=\frac{4}{4k+3}=\frac{4(k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)(4k+3)}=\frac{(4k+4)(k+2)}{(k+1)(k+2)(4k+3)}$$

$$=\frac{[(4k+3)+1](k+2)}{(k+1)(k+2)(4k+3)}=\frac{(4k+3)(k+2)+(k+2)}{(k+1)(k+2)(4k+3)}=\frac{(4k+3)[(k+1)+1]+(k+2)}{(k+1)(k+2)(4k+3)}$$

$$=\frac{(4k+3)(k+1)+(4k+3)+(k+2)}{(k+1)(k+2)(4k+3)}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(4k+3)}\text{。}$$

又$\because n=4k+3, \therefore k=\dfrac{n-3}{4},\ k+1=\dfrac{n+1}{4},\ \ k+2=\dfrac{n+5}{4}$,

故 $\dfrac{4}{4k+3}=\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}+\dfrac{1}{(k+1)(4k+3)}$, 即 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{\frac{n+5}{4}}+\dfrac{1}{\frac{n+1}{4}\times\frac{n+5}{4}}+\dfrac{1}{n\times\frac{n+1}{4}}$。

例如: $\dfrac{4}{11}(n=11)=\dfrac{1}{\frac{11+5}{4}}+\dfrac{1}{\frac{11+1}{4}\times\frac{11+5}{4}}+\dfrac{1}{11\times\frac{11+1}{4}}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{33}$。

$$\frac{4}{\underbrace{1619}_{\text{質數}}}(n=1619)=\frac{1}{\frac{1619+5}{4}}+\frac{1}{\frac{1619+1}{4}\times\frac{1619+5}{4}}+\frac{1}{1619\times\frac{1619+1}{4}}$$

$$=\frac{1}{406}+\frac{1}{405\times 406}+\frac{1}{1619\times 405}=\frac{1}{406}+\frac{1}{164{,}430}+\frac{1}{655{,}695}\text{。}$$

至此,對於 $\dfrac{4}{n}$ 的探討就只剩下 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{4k+1}$ 須要研究討論:

(C).若 $n=4k+1$ 時,

因為從 $\dfrac{4}{n}(n\ge 5)=\dfrac{4}{4k+1}$ ($k\ge 1$的正整數)有: $\dfrac{4}{5},\dfrac{4}{9},\dfrac{4}{13},\dfrac{4}{17},\dfrac{4}{21},\dfrac{4}{25},\dfrac{4}{29},\dfrac{4}{33},\dfrac{4}{37},\dfrac{4}{41},\dfrac{4}{45},\dfrac{4}{49},\dfrac{4}{53}$, $\dfrac{4}{57},\dfrac{4}{61},\dfrac{4}{65},\dfrac{4}{69},\dfrac{4}{73},\dfrac{4}{77},\dfrac{4}{81},\dfrac{4}{85},\dfrac{4}{89},\dfrac{4}{93},\dfrac{4}{97},\dfrac{4}{101},\dfrac{4}{105},\dfrac{4}{109},\dfrac{4}{113},\dfrac{4}{117},\dfrac{4}{121},\cdots\cdots,\dfrac{4}{4k+1}$,可分為

(a). $\dfrac{4}{5},\dfrac{4}{17},\dfrac{4}{29},\dfrac{4}{41},\dfrac{4}{53},\dfrac{4}{65},\dfrac{4}{77},\dfrac{4}{89},\dfrac{4}{101},\dfrac{4}{113},\dfrac{4}{125},\cdots,\dfrac{4}{4k+1}$ (即$n=4k+1=3t+2=12s+5$),

(b). $\dfrac{4}{9},\dfrac{4}{21},\dfrac{4}{33},\dfrac{4}{45},\dfrac{4}{57},\dfrac{4}{69},\dfrac{4}{81},\dfrac{4}{93},\dfrac{4}{105},\dfrac{4}{117},\dfrac{4}{129},\cdots,\dfrac{4}{4k+1}$ (即$n=4k+1=3t=12s+9$),

(c). $\dfrac{4}{13},\dfrac{4}{25},\dfrac{4}{37},\dfrac{4}{49},\dfrac{4}{61},\dfrac{4}{73},\dfrac{4}{85},\dfrac{4}{97},\dfrac{4}{109},\dfrac{4}{121},\dfrac{4}{133},\cdots,\dfrac{4}{4k+1}$ (n為3的倍數餘1, $n=3t+1$)

等三部分,利用「預備知識中的(一)(二)」,我們可將 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{4k+1}$ 化成 $\dfrac{1}{(k+1)}+\dfrac{3}{(4k+1)(k+1)}$;

又因(C)部分(a)中的n為3的倍數餘2 (即$n=4k+1=3t+2=12s+5$), $\therefore\ n=4k+1=3t+2$,

故 $4k=3t+1,\ k=\dfrac{3t+1}{4},\ k+1=\dfrac{3t+5}{4},\ n+1=3t+3=3(t+1), \therefore\ \dfrac{n+1}{3}=t+1$為整數;

所以(C)部分(a)的表達式為:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{(k+1)}+\frac{3}{(4k+1)(k+1)}=\frac{1}{(k+1)}+\frac{3}{n(k+1)}=\frac{1}{(k+1)}+\frac{3\times(n+1)}{n(k+1)\times(n+1)}$$

$$=\frac{1}{(k+1)}+\frac{3\times n}{n(k+1)\times(n+1)}+\frac{3\times 1}{n(k+1)\times(n+1)}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{\frac{n+3}{4}\times\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{4}\times\frac{n+1}{3}}。$$

…… 公式(6)

例如: $\frac{4}{n}=\frac{4}{\underbrace{101}_{質數}}=\frac{1}{\frac{101+3}{4}}+\frac{1}{\frac{101+3}{4}\times\frac{101+1}{3}}+\frac{1}{101\times\frac{101+3}{4}\times\frac{101+1}{3}}=\frac{1}{26}+\frac{1}{26\times34}+\frac{1}{101\times26\times34}$。

當然也可 $\frac{4}{\underbrace{101}_{質數}}=\frac{1}{26}+\frac{3}{101\times26}=\frac{1}{26}+\frac{1}{101}\times\frac{3}{\underbrace{26}_{=3t+2}}$(代入公式(3)) $=\frac{1}{26}+\frac{1}{101}\times(\frac{1}{\frac{26+1}{3}}+\frac{1}{26\times\frac{26+1}{3}})$

$$=\frac{1}{26}+\frac{1}{101}\times(\frac{1}{9}+\frac{1}{26\times9})=\frac{1}{26}+\frac{1}{101\times9}+\frac{1}{101\times26\times9}。$$

(註: $\frac{1}{26\times34}+\frac{1}{101\times26\times34}=\frac{1}{101\times9}+\frac{1}{101\times26\times9}$)

又在 (C) 部分 (b) 中的 n 為3的倍數(即 $n=4k+1=3t=12s+9$),所以 (C) 部分 (b) 的表達式為:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{(k+1)}+\frac{3}{(4k+1)(k+1)}=\frac{1}{(k+1)}+\frac{3}{n(k+1)}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{\frac{n}{3}\times\frac{n+3}{4}}。$$ …… 公式(7)

例如: $\frac{4}{n}=\frac{4}{45}=\frac{1}{\frac{45+3}{4}}+\frac{1}{\frac{45}{3}\times\frac{45+3}{4}}=\frac{1}{12}+\frac{1}{15\times12}$。(當然可以化成三項單位分數之和啦!)

如此一來,如此,我們就只剩下 (C) 部分中 (c) 的 $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4}{3t+1}=\frac{4}{12s+1}$ 的 $n=13,25,37,49,61,73,85,97,109,121,133,147,159,171,183,\cdots$,(即 n 為12的倍數餘1, $n=12s+1$)須作討論:我們再將 (C) 部分中 (c) 的 $n=12s+1$ 分成兩部分:

(1). $n=13,37,61,85,109,133,157,181,205,229,253,277,\cdots,24s'+13,(s'=0,1,2,3,\cdots)$ 與

(2). $n=25,49,73,97,121,145,169,193,217,241,265,289,\cdots,24s'+1,\ (s'=1,2,3,\cdots)$。

而當

(1). $n=13,37,61,85,109,133,157,181,205,229,253,277,301,\cdots,(24s'+13),(s'=0,1,2,3,\cdots)$ 時,

其 $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4}{3t+1}=\frac{4}{12s+1}=\frac{4}{24s'+13}=\frac{4}{13},\frac{4}{37},\frac{4}{61},\frac{4}{85},\frac{4}{109},\frac{4}{133},\cdots,\frac{4}{24s'+13}$,當將

$\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}$ 化成 $\frac{1}{k+1}+\frac{3}{(4k+1)(k+1)}$ 時的 $(k+1)$ 與 n 都為3的倍數餘1,且其 $(k+1)$ 為偶數。

($\because n=4k+1=3t+1=12s+1, \therefore 4k=3t=12s$,故 $k=3s$ 為整數, $\therefore k+1=3s+1$ 為3的倍數餘1;

又 $\because n=4k+1=24s'+13, \therefore k=\frac{24s'+12}{4}=6s'+3=3(2s'+1)$ (為奇數),故 $k+1$ 為偶數,必有

因數"2"與"1"。) 例如: $\frac{4}{13}=\frac{4\times4}{13\times4}=\frac{1}{\underbrace{4}_{偶數}}+\frac{3}{13\times\underbrace{4}_{偶數}}$; $\frac{4}{181}=\frac{4\times46}{181\times46}=\frac{1}{\underbrace{46}_{偶數}}+\frac{3}{181\times\underbrace{46}_{偶數}}$;

再如: $\dfrac{4}{\underbrace{4861}_{\text{質數},=24\times202+13}}=\dfrac{4\times1216}{4861\times1216}=\dfrac{1}{1216}+\dfrac{3}{4861\times1216}=\dfrac{1}{1216}+\dfrac{3\times(2+1)}{4861\times1216\times(2+1)}$

$$=\frac{1}{1216}+\frac{3\times2}{4861\times1216\times(2+1)}+\frac{3\times1}{4861\times1216\times(2+1)}=\frac{1}{1216}+\frac{1}{4861\times608}+\frac{1}{4861\times1216}\text{。}$$

如此,我們就可以利用 "分母因數(合併)法"來解決我們的問題,而得到三項表達式:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{(4k+1)(k+1)}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{3\times(2+1)}{n\times\frac{n+3}{4}\times(2+1)}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{8}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{4}}\text{。}$$

…… 公式(8)

例如: $\dfrac{4}{\underbrace{109}_{\text{質數},=24\times4+13}}=\dfrac{1}{\frac{109+3}{4}}+\dfrac{1}{109\times\frac{109+3}{8}}+\dfrac{1}{109\times\frac{109+3}{4}}=\dfrac{1}{28}+\dfrac{1}{109\times14}+\dfrac{1}{109\times28}$。

$$\frac{4}{\underbrace{4861}_{\text{質數},=24\times202+13}}=\frac{1}{\frac{4861+3}{4}}+\frac{1}{4861\times\frac{4861+3}{8}}+\frac{1}{4861\times\frac{4861+3}{4}}$$

$$=\frac{1}{1216}+\frac{1}{4861\times608}+\frac{1}{4861\times1216}\text{。}$$ 至於

(2). $n=\underline{25},\underrightarrow{49},\underline{\underline{73}},\underleftrightarrow{97},\underleftarrow{121},\overleftrightarrow{145},\overline{169},\underline{193},\underrightarrow{217},\underline{\underline{241}},\underleftrightarrow{265},\underleftarrow{289},\overleftrightarrow{313},\overline{337},\cdots(24s'+1),(s'=1,2,3,\cdots)$。

它們呈現公差為 24 ,間距為 168 的循環規律,而其 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{4k+1}=\dfrac{4}{25},\dfrac{4}{49},\dfrac{4}{73},\dfrac{4}{121},\dfrac{4}{145},\dfrac{4}{169},\cdots,$

$\dfrac{4}{24s'+1}$, 當將 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{4k+1}=\dfrac{4}{3t+1}=\dfrac{4}{12s+1}=\dfrac{4}{24s'+1}$ 化成 $\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{3}{(4k+1)(k+1)}$ 時的 $(k+1)$ 與 n 都為 3 的倍數 餘1, 且其 $(k+1)$ 為奇數,而<u>有可能不可以將</u> $\dfrac{3}{(4k+1)(k+1)}$ 化成兩個單位分數之和(有如公式(4.2))。 ($\because n=4k+1=24s'+1,\therefore k=6s'$ (為偶數), 故 $k+1$ 為奇數。)

例如: $\dfrac{4}{73}=\dfrac{4\times19}{73\times19}=\dfrac{1}{\underbrace{19}_{\text{奇數}}}+\dfrac{3}{73\times\underbrace{19}_{\text{奇數}}}$; $\dfrac{4}{313}=\dfrac{4\times79}{313\times79}=\dfrac{1}{\underbrace{79}_{\text{奇數}}}+\dfrac{3}{313\times\underbrace{79}_{\text{奇數}}}$; 所以,我們無法直 接利用 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{4k+1}$ 化成 $\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{3}{(4k+1)(k+1)}$ 時,直接轉化其為三項表達式;

而得另尋他法,為此我們利用公差為 24 ,間距為 168 循環規律的特性,將資料再分成七組: $(i).168r+1$型 $(ii).168r+25$型 $(iii).168r+49$型 $(iv).168r+73$型 $(v).168r+97$型 $(vi).168r+121$型 $(vii).168r+145$型等七型,並建立了以下的[表(一)],[表(二)]

【表一】

$(i).168r+1$型: 有 $1(\times),169,337,\underline{\underline{505}},673,841,1009,1177,\underline{\underline{1345}},1513,1681,\cdots,(168r+1)$;

$(ii).168r+25$型: 有 $\underline{\underline{25}},193,361,529,697,\underline{\underline{865}},1033,1201,1369,1537,\underline{\underline{1705}},\cdots,(168r+25)$;

• $(iii).168r+49$ 型:有 $49,217,\underline{\underline{385}},553,721,889,1057,\underline{\underline{1225}},1393,1561,1729,\cdots,(168r+49)$;

• $(iv).168r+73$ 型:有 $73,241,409,577,\underline{\underline{745}},913,1081,1249,1417,\underline{\underline{1585}},1753,\cdots,(168r+73)$;

• $(v).168r+97$ 型:有 $97,\underline{\underline{265}},433,601,769,937,\underline{\underline{1005}},1273,1441,1609,1777,\cdots,(168r+97)$;

$(vi).168r+121$ 型:有 $121,289,457,\underline{\underline{625}},793,961,1129,1297,\underline{\underline{1465}},1633,1801,\cdots,(168r+121)$;

• $(vii).168r+145$ 型:有 $\underline{\underline{145}},313,481,649,817,\underline{\underline{985}},1153,1321,1489,1657,\underline{\underline{1825}},\cdots,(168r+145)$;

我們操作了這七型 $n<5000$ 在化成三項單位分數之和的可能性。(見[附件2] ~ [附件5])
結果我們發現了在(iii).[$168r+49$型], (iv).[$168r+73$型], (v).[$168r+97$型], (vii).[$168r+145$型]
的四類都可化成三項單位分數之和的表達式,茲將這四類的表達式,
置於下方:([表一]中『•』表示可化成三項單位分數之和的表達式，理由如下:)

• 在(iii). $n=168r+49$ 型中,

$\because n=168r+49=7\times(24r+7)$, $\therefore n$ 必為 7 的倍數,故我們可用「等差階數(II)型定位法」

得到 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{7}{n\times(k+2)}$, 而可將 $\dfrac{7}{n\times(k+2)}$ 中的 7 化為 "1";再用公式(1),就可得以下

三項單位分數之和的表達式。(見[附件2])

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{\dfrac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\dfrac{n+7}{28}+1}+\frac{1}{n\times\dfrac{n+7}{28}\times(n\times\dfrac{n+7}{28}+1)}$$ 的三項單位分數之和的表達式。

…… 公式(9)

例如:
$$\frac{4}{\underbrace{217}_{=168r+49型}}=\frac{1}{\dfrac{217+7}{4}}+\frac{1}{217\times\dfrac{217+7}{28}+1}+\frac{1}{217\times\dfrac{217+7}{28}\times(217\times\dfrac{217+7}{28}+1)}$$
$$=\frac{1}{56}+\frac{1}{217\times8+1}+\frac{1}{(217\times8)\times(217\times8+1)}=\frac{1}{14}+\frac{1}{1737}+\frac{1}{1736\times1737}。$$

例如:
$$\frac{4}{\underbrace{889}_{=168r+49型}}=\frac{1}{\dfrac{889+7}{4}}+\frac{1}{889\times\dfrac{889+7}{28}+1}+\frac{1}{889\times\dfrac{889+7}{28}\times(889\times\dfrac{889+7}{28}+1)}$$
$$=\frac{1}{224}+\frac{1}{889\times112+1}+\frac{1}{(889\times112)\times(889\times112+1)}。$$

• 在(iv)類.$168r+73$ 型中, $\because$ 依照等差階數 (II) 型,

可得 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{7}{n\times(k+2)}$, 又 $k=\dfrac{n-1}{4}$, $k+2=\dfrac{n+7}{4}$, $n=168r+73$;

$$\therefore \frac{n+7}{4}=\frac{168r+73+7}{4}=\frac{168r+80}{4}=\frac{4(42r+20)}{4}=42r+20=42r+21-1=7(6r+3)-1,$$

故 $k+2=\dfrac{n+7}{4}7(6r+3)-1$ 為 7 的倍數少 1, 因而只要在 $(k+2)$ 補上因數 "1",就可用

「餘數湊整法」完成表達式。(見[附件3])

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+11}{28}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{4}\times\frac{n+11}{28}}$$ 的三項單位分數之和的表達式:

…… 公式(10)

例如: $$\frac{4}{73}=\frac{1}{\frac{73+7}{4}}+\frac{1}{73\times\frac{73+11}{28}}+\frac{1}{\frac{73\times(73+7)\times(73+11)}{4\times 28}}=\frac{1}{20}+\frac{1}{73\times 3}+\frac{1}{73\times 20\times 3}。$$

例如: $$\frac{4}{\underbrace{1081}_{\text{質數},=168r+73\text{型}}}=\frac{1}{\frac{1081+7}{4}}+\frac{1}{1081\times\frac{1081+11}{28}}+\frac{1}{\frac{1081\times(1081+7)\times(1081+11)}{4\times 28}}$$

$$=\frac{1}{272}+\frac{1}{1081\times 39}+\frac{1}{1081\times 272\times 39}。$$

- 在(v). $n=168r+97$ 型中,

$\because$ 依照等差階數 (II) 型,

可得$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n\times(k+2)}$,又 $k=\frac{n-1}{4}$, $k+2=\frac{n+7}{4}$, $n=168r+97$;

$\therefore$ $n+7=168r+97+7=168r+105-1=7(24r+15)-1$;故 n 為 7 的倍數少 1,又 n 有因數 "1",而可用「餘數湊整法」完成表達式。(見[附件4])

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{\frac{n+7}{4}\times\frac{n+1}{7}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{4}\times\frac{n+1}{7}}$$ 的三項單位分數之和的表達式。

…… 公式(11)

例如: $$\frac{4}{\underbrace{601}_{=168r+97\text{型}}}=\frac{1}{\frac{601+7}{4}}+\frac{1}{\frac{601+7}{4}\times\frac{601+1}{7}}+\frac{1}{601\times\frac{601+7}{4}\times\frac{601+1}{7}}$$

$$=\frac{1}{152}+\frac{1}{152\times 86}+\frac{1}{601\times 152\times 86}。$$

例如: $$\frac{4}{\underbrace{2449}_{=168r+97\text{型}}}=\frac{1}{\frac{2449+7}{4}}+\frac{1}{\frac{2449+7}{4}\times\frac{2449+1}{7}}+\frac{1}{2449\times\frac{2449+7}{4}\times\frac{2449+1}{7}}$$

$$=\frac{1}{614}+\frac{1}{614\times 350}+\frac{1}{2449\times 614\times 350}。$$

- 在(vii). $n=168r+145$ 型中,

$\because$ 依照等差階數 (II) 型,可得

$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n\times(k+2)}$,又 $k=\frac{n-1}{4}$, $k+2=\frac{n+7}{4}$, $n=168r+145$;

$\therefore$ $n+7=168r+145+7=168r+147+5=7(24r+21)+5$;故 $n=7(24r+21)-2$;即 n 為 7 的倍數少 2,又 $k+2=\frac{n+7}{4}=\frac{168r+147+5}{4}=\frac{4(42r+38)}{4}=42r+38=2(21r+19)$為偶數,

而有因數"2", 故 $\dfrac{k+2}{2}+2=\dfrac{2(21r+19)}{2}+2=(21r+19)+2=7(3r+3)$。

因此我們就可用「餘數湊整法」與「分母因數合併法」完成表達式。(見[附件5])

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+23}{28}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{8}\times\frac{n+23}{56}}$$ 的三項單位分數之和的表達式。

…… 公式(12)

例如：
$$\frac{4}{\underbrace{649}_{=168r+145型}}=\frac{1}{\frac{649+7}{4}}+\frac{1}{649\times\frac{649+23}{28}}+\frac{1}{649\times\frac{649+23}{56}\times\frac{649+7}{8}}$$
$$=\frac{1}{164}+\frac{1}{649\times24}+\frac{1}{649\times12\times164}。$$

例如：
$$\frac{4}{\underbrace{1321}_{質數,=168r+145型}}=\frac{1}{\frac{1321+7}{4}}+\frac{1}{1321\times\frac{1321+23}{28}}+\frac{1}{1321\times\frac{1321+23}{56}\times\frac{1321+7}{8}}$$
$$=\frac{1}{332}+\frac{1}{1321\times48}+\frac{1}{1321\times24\times332}。$$

在完成(iii).[$168r+49$型], (iv).[$168r+73$型], (v).[$168r+97$型], (vii).[$168r+145$型]的四類型後, 我們再次審視[表一], 並再次觀察(見[表二]), 發現剩下的(i).[$168r+1$型], (ii).[$168r+25$型], (vi).[$168r+121$型](vi).[$168r+121$型]的三型中的每一類型都呈現間隔5個"168"(即間隔 "840")其個位數字才會再相同, 又因除法運算與進位的關係: 其個位數字為

1(十位數字"偶") $\rightarrow$ 3 (十位數字"奇") $\rightarrow$ 5(十位數字"偶") $\rightarrow$ 7(十位數字"奇")
$\rightarrow$ 9(十位數字"偶")的規律在循環。(其實上述七類型都是如此)

因此我們就針對此特性, 以個位數字"5"為中心, 依"個位數字"分類(如表二)並; 並做了 $n<5{,}000$ 的操作(見[附件6] ~ [附件8])。

【表二】(註:各類標記代表可討論的相同個位數)

(i).$168r+1$型: 有 $1(\times),169,\underleftrightarrow{337},\underline{\underline{505}},\underline{673},841,1009,\underleftrightarrow{1177},\underline{\underline{1345}},\underline{1513},1681,\cdots,(168r+1)$;

(ii).$168r+25$型: 有 $\underline{\underline{25}},\underline{193},361,529,\underleftrightarrow{697},\underline{\underline{865}},\underline{1033},1201,1369,\underleftrightarrow{1537},\underline{\underline{1705}},\cdots,(168r+25)$;

(vi).$168r+121$型: 有 $121,289,\underleftrightarrow{457},\underline{\underline{625}},\underline{793},961,1129,\underleftrightarrow{1297},\underline{\underline{1465}},\underline{1633},1801,\cdots,(168r+121)$;

◎當我們將 (i).$168r+1$型、(ii).$168r+25$型、(vi).$168r+121$型等三型中, 個位數字"7"者, 由小到大排成一列: $\underleftrightarrow{337},\underleftrightarrow{457},\underleftrightarrow{697},\underleftrightarrow{1177},\underleftrightarrow{1297},\underleftrightarrow{1537},\underleftrightarrow{2017},\underleftrightarrow{2137},\underleftrightarrow{2377},\underleftrightarrow{2857},\underleftrightarrow{2977},\underleftrightarrow{3217},\underleftrightarrow{3697},\underleftrightarrow{3717},\underleftrightarrow{4057},\underleftrightarrow{4537},\underleftrightarrow{4657},\underleftrightarrow{4897},\underleftrightarrow{5497}$; 我們亦可得到三項單位分數之和的表達式: (見[附件6])

(『◆』表示可化成三項 單位分數之和的表達式，理由如下:)

◆在 $(i).168r+1$型、$(ii).168r+25$ 型 、$(vi).168r+121$ 等三型中,個位數字"7"者中,

我們沿用"等差階數 (II)型定位法"的觀念: $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$;

可得 $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4(k+1)}{(4k+1)(k+1)}=\frac{(4k+1)+3}{(4k+1)(k+1)}=\frac{4k+1}{(4k+1)(k+1)}+\frac{3}{(4k+1)(k+1)}$

$=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{(4k+1)(k+1)}$。又 $\because n=4k+1, n+3=4k+4=4(k+1), \therefore k+1=\frac{n+3}{4}$,

故 $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4(k+1)}{(4k+1)(k+1)}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{(4k+1)(k+1)}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{3}{n\times\frac{n+3}{4}}$。

又當 n的個位數字為"7", $\therefore n+3$其個位數字為"0",即 $n+3=(4k+1)+3=4(k+1)$,

$\therefore k+1=\frac{n+3}{4}$必為整數,故 $n+3$必為4的倍數;且 $n+3$其個位數字為"0",所以 $n+3$

必有5的倍數,而有因數"5","1"。(例如: $k+1=\frac{n+3}{4}=\frac{697+3}{4}=175$),也就能符合分母

因數(合併)法,將 $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{3}{n\times\frac{n+3}{4}}$ 中的 $\frac{3}{n\times\frac{n+3}{4}}$ 再分成兩項單位分數之和。

即 $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{(4k+1)(k+1)}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{3}{n\times\frac{n+3}{4}}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{3\times(5+1)}{n\times\frac{n+3}{4}\times(5+1)}$

$=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{3\times5}{n\times\frac{n+3}{4}\times(5+1)}+\frac{3\times1}{n\times\frac{n+3}{4}\times(5+1)}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{10}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{2}}$。

因此其表達式為:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{(4k+1)(k+1)}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{10}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{2}}\text{。} \cdots\cdots \text{ 公式(13)}$$

例如: $\frac{4}{\underbrace{1297}_{\text{質數}}}=\frac{1}{\frac{1297+3}{4}}+\frac{1}{1297\times\frac{1297+3}{10}}+\frac{1}{1297\times\frac{1297+3}{2}}$

$=\frac{1}{325}+\frac{1}{1297\times130}+\frac{1}{1297\times325}$。

◎又將 $(i).168r+1$型、$(ii).168r+25$ 型 、$(vi).168r+121$ 型等三型中,個位數字"5"者,由小到大排成一列: $\underline{\underline{25}}$, $\underline{\underline{505}}$, $\underline{\underline{625}}$, $\underline{\underline{865}}$, $\underline{\underline{1345}}$, $\underline{\underline{1465}}$, $\underline{\underline{1705}}$, $\underline{\underline{2185}}$, $\underline{\underline{2305}}$, $\underline{\underline{2545}}$, $\underline{\underline{3025}}$, $\underline{\underline{3145}}$, $\underline{\underline{3385}}$, $\underline{\underline{3985}}$, $\underline{\underline{4225}}$, $\underline{\underline{4825}}$, $\underline{\underline{5065}}$;由於 n的個位數字為"5",含有因數"5","1"。所以與個位數字為"7"者同。
亦可得到三項單位分數之和的表達式:(操作見[附件7]),

◆在 $(i).168r+1$型、$(ii).168r+25$型、$(vi).168r+121$等三型中,個位數字"5"者中,
我們仍沿用"等差階數(II)型定位法"的觀念:$\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{n(k+1)}$;

可得 $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4(k+1)}{(4k+1)(k+1)}=\frac{(4k+1)+3}{(4k+1)(k+1)}=\frac{4k+1}{(4k+1)(k+1)}+\frac{3}{(4k+1)(k+1)}$。

$=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{(4k+1)(k+1)}$;又$\because n=4k+1, n+3=4k+4=4(k+1), \therefore k+1=\frac{n+3}{4}$,

故 $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4(k+1)}{(4k+1)(k+1)}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{3}{n\times\frac{n+3}{4}}$。

又$\because$ n的個位數字為"5", 而$n+3=(4k+1)+3=4(k+1)$,故$k+1=\frac{n+3}{4}$必為整數,
$\therefore$ $n+3$必為4的倍數;且n的個位數字為"5",所以n為5的倍數,而含有因數"5","1"。

也就能符合分母因數(合併)法,將$\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{3}{n\times\frac{n+3}{4}}$中的$\frac{3}{n\times\frac{n+3}{4}}$再分成兩項單位分數之和。

即 $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{(4k+1)(k+1)}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{3}{n\times\frac{n+3}{4}}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{3\times(5+1)}{n\times\frac{n+3}{4}\times(5+1)}$($\because n$有因數5,1)

$=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{3\times5}{n\times\frac{n+3}{4}\times(5+1)}+\frac{3\times1}{n\times\frac{n+3}{4}\times(5+1)}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{\frac{n}{5}\times\frac{n+3}{2}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{2}}$。

因此在整理後其表達式仍為:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{(4k+1)(k+1)}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{10}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{2}}\text{。}\cdots\cdots\ \text{公式(14)}$$

(與個位數字"7"者的表達式同)

例如: $\frac{4}{625}=\frac{1}{\frac{625+3}{4}}+\frac{1}{625\times\frac{625+3}{10}}+\frac{1}{625\times\frac{625+3}{2}}=\frac{1}{157}+\frac{1}{125\times314}+\frac{1}{625\times314}$。

◎而在 $(i).168r+1$型、$(ii).168r+25$型、$(vi).168r+121$等三型中,個位數字"3"者,由小到大排成一列: <u>193</u>,<u>673</u>,<u>793</u>,<u>1033</u>,<u>1513</u>,<u>1633</u>,<u>1873</u>,<u>2353</u>,<u>2473</u>,<u>2713</u>,<u>3193</u>,<u>3313</u>,<u>3553</u>,<u>4033</u>,<u>4153</u>,<u>4393</u>,<u>4873</u>,<u>4993</u>;

◆在 $(i).168r+1$型、$(ii).168r+25$型、$(vi).168r+121$等三型中,個位數字"3"者中,
我們仍可沿用"等差階數(II)型定位法"的觀念:$\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{n(k+2)}$;

可得 $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4(k+2)}{(4k+1)(k+2)}=\frac{(4k+1)+7}{(4k+1)(k+2)}=\frac{4k+1}{(4k+1)(k+2)}+\frac{7}{(4k+1)(k+2)}$

$=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{(4k+1)(k+2)}$。又 $\because n=4k+1, n+7=4k+8=4(k+2), \therefore k+2=\frac{n+7}{4}$,

故 $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4(k+2)}{(4k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{(4k+1)(k+2)}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{7}{n\times\frac{n+7}{4}}$。

又 $\because$ n 的個位數字為"3", $\therefore n+7$ 其個位數字為"0",即 $n+7=(4k+1)+7=4(k+2)$,

$\therefore k+2=\frac{n+7}{4}$ 必為整數,故 $n+7$ 必為 4 的倍數;且 $n+7$ 其個位數字為"0",所以 $n+7$ 必為10 的倍數,而有因數"5","2"。(例如:$n+7=673+7=800$),也就能符合分母因數(合併)法,將 $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{7}{n\times\frac{n+7}{4}}$ 中的 $\frac{7}{n\times\frac{n+7}{4}}$ 再分成兩項單位分數之和。

即 $\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{(4k+1)(k+2)}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{7}{n\times\frac{n+7}{4}}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{7\times(5+2)}{n\times\frac{n+7}{4}\times(5+2)}$

$=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{7\times5}{n\times\frac{n+7}{4}\times(5+2)}+\frac{7\times2}{n\times\frac{n+7}{4}\times(5+2)}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{4\times5}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{4\times2}}$

$=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{20}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{8}}$。

因此其表達式為:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{k+2}+\frac{7}{(4k+1)(k+2)}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{20}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{8}}\text{。} \cdots\cdots \text{ 公式(15)}$$

例如: $\frac{4}{\underbrace{673}_{\substack{\text{質數}\\=168r+1\text{型},\\\text{個位數字3}}}}=\frac{1}{\frac{673+7}{4}}+\frac{1}{673\times\frac{673+7}{20}}+\frac{1}{673\times\frac{673+7}{8}}=\frac{1}{170}+\frac{1}{673\times34}+\frac{1}{673\times85}$。

(與[預備知識(五)的餘數湊整法的 $\frac{4}{673}=\frac{1}{171}+\frac{1}{171\times62}+\frac{1}{673\times19\times62}$ 作比較!)

在操作推導(i).$168r+1$ 型、(ii).$168r+25$ 型、(vi).$168r+121$ 等三型中,依個位數字"3"、"5"、"7"的特性所得的三項單位分數之和的通式,仍適合(iii).$168r+49$ 型、(iv).$168r+73$ 型、(v).$168r+97$型、(v).$168r+145$型等四型中,依個位數字所產生的表達式。只不過型態

不同,例如:

$$\frac{4}{\underbrace{145}_{\text{個位數字為5}}}(\text{依公式}(14))=\frac{1}{\frac{145+3}{4}}+\frac{1}{145\times\frac{145+3}{10}}+\frac{1}{145\times\frac{145+3}{2}}=\frac{1}{37}+\frac{1}{29\times 74}+\frac{1}{145\times 74}\text{。}$$

$$\frac{4}{\underbrace{145}_{=168r+145\text{型}}}=\frac{1}{\frac{145+7}{4}}+\frac{1}{145\times\frac{145+23}{28}}+\frac{1}{145\times\frac{145+7}{8}\times\frac{145+23}{56}}=\frac{1}{38}+\frac{1}{145\times 6}+\frac{1}{145\times 19\times 3}\text{。}$$

(依公式(12))

至此,我們將已推得的 $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}$ 化成三項單位分數之和的研究結果更具體整理如下:

(1). $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4}{3t+2}=\frac{4}{12s+5}$,表達式: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{\frac{n+3}{4}\times\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{4}\times\frac{n+1}{3}}$。$\cdots$ 公式(6)

(2). $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4}{3t}=\frac{4}{12s+9}$, 則表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{\frac{n}{3}\times\frac{n+3}{4}}$。 $\cdots\cdots$ 公式(7)

(3). $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4}{3t+1}=\frac{1}{12s+1}$ 分成: $(a).\ \frac{4}{n}=\frac{1}{24s'+13}$ $(b).\ \frac{4}{n}=\frac{1}{24s'+1}$

$(a).\ \frac{4}{n}=\frac{4}{24s'+13}$(即 $n=24s'+13$),則表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{8}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{4}}$。$\cdots\cdots$ 公式(8)

$(b).\ \frac{4}{n}=\frac{4}{24s'+1}$(即 $n=24s'+1$) 再分成: $(i).\ n=168r+1$ $(ii).\ n=168r+25$ $(iii).\ n=168r+49$ $(iv).\ n=168r+73$ $(v).\ n=168r+97$ $(vi).\ n=168r+121$ $(vii).\ n=168r+145$ 等七型:

- $(iii).\ \frac{4}{n}=\frac{4}{24s'+1}=\frac{4}{168r+49}$,表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{28}+1}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{28}\times(n\times\frac{n+7}{28}+1)}$

$\cdots$公式(9)

- $(iv).\ \frac{4}{n}=\frac{4}{24s'+1}=\frac{4}{168r+73}$, 表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+11}{28}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{4}\times\frac{n+11}{28}}$

$\cdots$公式(10)

- $(v).\ \frac{4}{n}=\frac{4}{24s'+1}=\frac{4}{168r+97}$, 表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{\frac{n+7}{4}\times\frac{n+1}{7}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{4}\times\frac{n+1}{7}}$

$\cdots$公式(11)

- $(vii).\ \frac{4}{n}=\frac{4}{24s'+1}=\frac{4}{168r+145}$, 表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+23}{28}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{8}\times\frac{n+23}{56}}$

$\cdots$公式(12)

而$(i).168r+1$、$(ii).168r+25$型、$(vi).168r+121$等三型中,以個位數字分類,分成:個位數字為"7"、"5"、"3"、"1"、"9"五型,其中

◆個位數字為 "7"型:

$$\text{表達式為:}\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{10}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{2}}\text{。…… 公式(13)}$$

◆個位數字為 "5"型:

$$\text{表達式為:}\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{10}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{2}}\text{。…… 公式(14)}$$

(與個位數字"7"者的表達式同)

◆個位數字為 "3"型:

$$\text{表達式為:}\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{20}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{8}}\text{。…… 公式(15)}$$

如此一來我們就掌握了破解$\frac{4}{n}$的神兵利器有 (i).除法運算+3倍數餘2的因數合併法 (ii).4倍數餘3的公式(5.2) (iii).公式(6)到公式(15);當然也有"等差階數定位法與"完全平方法"來助陣!

因此,我們現在就只剩下在$\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4}{3t+1}=\frac{4}{24s'+1}$中的$(i).168r+1$型、$(ii).168r+25$型、$(vi).168r+121$型等三型中,個位數字為 "1"、"9"兩型未解決,接著我們將未解決的個位數字為 "1"、"9"兩型由小至大($n=4k+1=3t+1=24s'+1<10{,}000$)列在[表三]、[表四],並操作了個位數字為"1"、"9"並將$n=4k+1<10{,}000$化成三項單位分數之和的操作方法與過程置於[附件9]、[附件10],作為說明:

【表三】個位數字為“1”

$(i).168r+1$型:有$1(\times)$, $\underbrace{841}_{=29^2},\underbrace{1681}_{=41^2},\underbrace{2521}_{\text{質數}},\underbrace{3361}_{\text{質數}},\underbrace{4201}_{\text{質數}},\underbrace{5041}_{=71^2},\underbrace{5881}_{\text{質數}},\underbrace{6721}_{=11\times13\times47},\underbrace{7561}_{\text{質數}},\underbrace{8401}_{=31\times271},\underbrace{9241}_{\text{質數}},$
$\cdots,(840r'+841=24s'+1);[r'=0,1,2,3,\cdots]$

$(ii).168r+25$型:有 $\underbrace{361}_{=19^2},\underbrace{1201}_{\text{質數}},\underbrace{2041}_{=13\times157},\underbrace{2881}_{=43\times67},\underbrace{3721}_{=61^2},\underbrace{4561}_{\text{質數}},\underbrace{5401}_{=11\times491},\underbrace{6241}_{=79^2},\underbrace{7081}_{=73\times97},\underbrace{7921}_{=89^2},\underbrace{8761}_{\text{質數}},\underbrace{9601}_{\text{質數}},$
$\cdots,(840r'+361=24s'+1);[r'=0,1,2,3,\cdots]$

$(vi).168r+121$型:有 $\underbrace{121}_{=11^2},\underbrace{961}_{=31^2},\underbrace{1801}_{\text{質數}},\underbrace{2641}_{=19\times139},\underbrace{3481}_{=59^2},\underbrace{4321}_{=29\times149},\underbrace{5161}_{=13\times397},\underbrace{6001}_{=17\times353},\underbrace{6841}_{\text{質數}},\underbrace{7681}_{\text{質數}},\underbrace{8521}_{\text{質數}},\underbrace{9361}_{=11\times23\times37},$
$\cdots,(840r'+121=24s'+1)[r'=0,1,2,3,\cdots]$

【表四】個位數字為“9”

$(i).168r+1$型:有 $\underbrace{169}_{=13^2},\underbrace{1009}_{\text{質數}},\underbrace{1849}_{=43^2},\underbrace{2689}_{\text{質數}},\underbrace{3529}_{\text{質數}},\underbrace{4369}_{=17\times257},\underbrace{5209}_{\text{質數}},\underbrace{6049}_{23\times263},\underbrace{6889}_{=83^2},\underbrace{7729}_{=59\times131},\underbrace{8569}_{=11\times19\times41},\underbrace{9409}_{=97^2},$
$\cdots,(840r'+169=24s'+1);[r'=0,1,2,3,\cdots]$

(ii).168r + 25 型：有 $\underbrace{529}_{=23^2},\underbrace{1369}_{37^2},\underbrace{2209}_{=47^2},\underbrace{3049}_{質數},\underbrace{3889}_{質數},\underbrace{4729}_{質數},\underbrace{5569}_{質數},\underbrace{6409}_{=13\times17\times29},\underbrace{7249}_{=11\times659},\underbrace{8089}_{質數},\underbrace{8929}_{質數},\underbrace{9769}_{質數},$

$\cdots,(840r'+529=24s'+1)$；$[r'=0,1,2,3,\cdots]$

(vi).168r + 121 型：有 $\underbrace{289}_{=17^2},\underbrace{1129}_{質數},\underbrace{1969}_{=11\times179},\underbrace{2809}_{=53^2},\underbrace{3649}_{=41\times89},\underbrace{4489}_{=67^2},\underbrace{5329}_{=73^2},\underbrace{6169}_{=31\times199},\underbrace{7009}_{=43\times163},\underbrace{7849}_{=47\times167},\underbrace{8689}_{質數},\underbrace{9529}_{=13\times733},$

$\cdots,(840r'+289=24s'+1)\ [r'=0,1,2,3,\cdots]$

由[表三][表四]中,我們發現：這些(i).$168r+1$型、(ii).$168r+25$型、(vi).$168r+121$型等三型中,個位數字"1"或"9"者,它不是平方數就是為$24s'+1$的質數或經標準分解式後其質因子皆為$4p'+1$與$4p'+3$($\because n=4k+1$為奇數,$\therefore n$的質因子只可為奇數)；也針對這個特性,我們操作了 $n<10{,}000$ 的 $\frac{4}{n}$,且建立了 $\frac{4}{\underbrace{n}_{有質因子e,f}}=\frac{4}{e\times f}=\frac{1}{e}\times\frac{4}{f}$後,得到了以下的心得與結論：

(1).在 $n=24s'+1$中的(i).$168r+1$型、(ii).$168r+25$型、(vi).$168r+121$型等三型中的個位數字為"1"或"9"者時,只要 n 經標準分解式後其質因子全為 $24s'+1$,我們就無法使用前述神兵利器與方法來直接完成三項單位分數之和的表達式;而需透過[預備知識]的方法來完成三項單位分數之和(是否如此?這正是要煩請教授指導之處)。例如：

$$*\frac{4}{\underbrace{9241(質數)}_{\substack{9241為24s'+1\\又為168r+1型\\且個位數字為1}}}=\frac{4\times2312}{9241\times\underbrace{2312}_{\substack{=2^3\times17^2,\\17\div7=2\cdots3,\\4\div7=0\cdots4}}}=\frac{9241+7}{9241\times2312}=\frac{1}{2312}+\frac{7\times(17+4)}{9241\times2312\times(17+4)}$$

$$=\frac{1}{2312}+\frac{1}{9241\times136\times3}+\frac{1}{9241\times578\times3}\text{。 [除法運算+餘數湊整法]}$$

$$*\frac{4}{\underbrace{8089(質數)}_{\substack{8089為24s'+1\\又為168r+25型\\且個位數字為9}}}=\frac{4\times2030}{8089\times\underbrace{2030}_{\substack{=2\times5\times7\times29,\\有因數2,29}}}=\frac{1}{2030}+\frac{31}{8089\times2030}=\frac{1}{2030}+\frac{31\times(29+2)}{8089\times2030\times(29+2)}$$

$$=\frac{1}{2030}+\frac{31\times29}{8089\times2030\times(29+2)}+\frac{31\times2}{8089\times2030\times(29+2)}$$

$$=\frac{1}{2030}+\frac{1}{8089\times70}+\frac{1}{8089\times1015}\text{。 [除法運算+分母因數合併法]}$$

(2).但在 $n=24s'+1$中的(i).$168r+1$型、(ii).$168r+25$型、(vi).$168r+121$型等三型中的個位數字為"1"或"9"者時,只要 n 經標準分解式後其質因子不全為 $24s'+1$,我們就可使用前述神兵利器與方法來直接完成三項單位分數之和的表達式。例如：

$$*\frac{4}{\underbrace{6721}_{\substack{=168r+1型\\=11\times13\times47,\\47為4k+3,\\不為24s'+1}}}=\frac{1}{143}\times\frac{4}{47}\text{(可用公式(5.2))}=\frac{1}{143}\times\left(\frac{1}{\frac{47+5}{4}}+\frac{1}{\frac{47+1}{4}\times\frac{47+5}{4}}+\frac{1}{47\times\frac{47+1}{4}}\right)$$

$$=\frac{1}{143}\times\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{12\times13}+\frac{1}{47\times12}\right)=\frac{1}{143\times13}+\frac{1}{143\times12\times13}+\frac{1}{143\times47\times12}\text{。}$$

$$*\frac{4}{\underbrace{6721}_{\substack{=11\times13\times47,\\13為24s'+13}}}=\frac{1}{11\times47}\times\frac{4}{13}(公式(8)法)=\frac{1}{11\times47}\times(\frac{1}{\frac{13+3}{4}}+\frac{1}{13\times\frac{13+3}{8}}+\frac{1}{13\times\frac{13+3}{4}})$$

$$=\frac{1}{11\times47}\times(\frac{1}{4}+\frac{1}{13\times2}+\frac{1}{13\times4})=\frac{1}{4\times11\times47}+\frac{1}{11\times26\times47}+\frac{1}{11\times47\times52}。$$

$$*\frac{4}{\underbrace{6721}_{\substack{=11\times13\times47,\\而11為3t+2,\\不為24s'+1}}}=\frac{4\times1681}{6721\times1681}=\frac{6721+3}{6721\times1681}=\frac{1}{1681}+\frac{3}{6721\times1681}$$

$$=\frac{1}{1681}+\frac{3\times(11+1)}{6721\times1681\times(11+1)}=\frac{1}{1681}+\frac{1}{611\times1681\times4}+\frac{1}{6721\times1681\times4}。$$

[除法運算＋分母因數合併法]

(3).在 $n=24s'+1$ 中的 $(i).168r+1$ 型、$(ii).168r+25$ 型、$(vi).168r+121$ 型等三型中,若 n 經標準分解式後其質因子仍為 $24s'+1$,但質因子的個位數字不為"1"或"9"者,我們仍能使用前述的神兵利器與方法來簡化完成三項 單位分數之和 的表達。例如:

$$*\frac{4}{\underbrace{25}_{\substack{=168r+25型=5^2\\5的個位數字不為"1","9"}}}=\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}(代入公式(14))=\frac{1}{5}\times(\frac{1}{\frac{5+3}{4}}+\frac{1}{5\times\frac{5+3}{10}}+\frac{1}{5\times\frac{5+3}{2}})$$

$$=\frac{1}{5}\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20})=\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{100}。[分解+公式(14)]$$

$$*\frac{4}{\underbrace{9409}_{\substack{=168r+1型\\=97^2,97為24s'+1\\個位數字不為"1","9"}}}=\frac{1}{97}\times\frac{4}{97}(代入公式(13))=\frac{1}{97}\times(\frac{1}{\frac{97+3}{4}}+\frac{1}{97\times\frac{97+3}{10}}+\frac{1}{97\times\frac{97+3}{2}})$$

$$=\frac{1}{97}\times(\frac{1}{25}+\frac{1}{97\times10}+\frac{1}{97\times50})=\frac{1}{2425}+\frac{1}{97\times97\times10}+\frac{1}{97\times97\times50}。$$

[分解＋公式(13)]

$$*\frac{4}{\underbrace{7081}_{\substack{=168r+25型\\=73\times97,73為24s'+1\\但個位數字不為"1","9"}}}(代入公式(15))=\frac{1}{97}\times\frac{4}{73}=\frac{1}{97}\times(\frac{1}{\frac{73+7}{4}}+\frac{1}{73\times\frac{73+7}{20}}+\frac{1}{73\times\frac{73+7}{8}})$$

$$=\frac{1}{97}\times(\frac{1}{20}+\frac{1}{73\times4}+\frac{1}{73\times10})=\frac{1}{97\times20}+\frac{1}{97\times73\times4}+\frac{1}{97\times73\times10}。$$

[分解＋公式(15)]

如此一來,遇有巨大數字的 n,我們仍可比照上述三個結論來處理:例如:

$$*\frac{4}{\underbrace{20,449}_{=11^2\times13^2}}=\frac{1}{11^2\times13}\times\frac{4}{\underbrace{13}_{=24s'+13}}(公式(8))=\frac{1}{11^2\times13}\times(\frac{1}{\frac{13+3}{4}}+\frac{1}{13\times\frac{13+3}{8}}+\frac{1}{13\times\frac{13+3}{4}})$$

$$=\frac{1}{11^2\times13\times4}+\frac{1}{11^2\times13\times26}+\frac{1}{11^2\times13\times52}。$$

$$*\frac{4}{\underbrace{7{,}654{,}321}_{=19\times 402859}}=\frac{1}{402{,}859}\times\frac{4}{\underbrace{19}_{4t+3}}\text{(代入公式(5.2))}$$

$$=\frac{1}{402{,}589}\times\left(\frac{1}{\frac{19+5}{4}}+\frac{1}{\frac{19+1}{4}\times\frac{19+5}{4}}+\frac{1}{402{,}859\times\frac{19+1}{4}}\right)$$

$$=\frac{1}{402{,}859\times 6}+\frac{1}{402{,}859\times 5\times 6}+\frac{1}{402{,}859\times 402{,}859\times 5}。$$

$$*\frac{4}{\underbrace{74{,}750{,}449}_{\substack{=168r+25\text{型}\\=8089\times 9241}}}=\frac{1}{8089}\times\frac{4}{9241}\text{(9241的分解)}=\frac{1}{8089}\times\left(\frac{1}{2312}+\frac{1}{9241\times 136\times 3}+\frac{1}{9241\times 578\times 3}\right)$$

$$=\frac{1}{8089\times 2312}+\frac{1}{8089\times 9241\times 136\times 3}+\frac{1}{8089\times 9241\times 578\times 3}。$$

(更鉅大數據例題,請參閱[附件11])

捌、最後心得與結論：

(一). 任何 0 與 1 之間的最簡真分數 $\frac{m}{n}$ 皆可表成「有限項」相異「單位分數」之和。

(二). 任何一個最簡真分數 $\frac{m}{n}$ 都可以表成不超過 m 個相異單位分數的和。

(三).「單位分數本身(即 $\frac{1}{n}$)」一定可以表成兩個相異「單位分數」之和。且其表達式為:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)} \qquad \cdots\cdots \text{ 公式(1)} \quad ,$$

(四).「單位分數」的表達型式不是唯一的。

(五). 0 與 1 之間的最簡真分數 $\frac{m}{n}$ 不一定可以表成兩個相異「單位分數」之和。

(六). 最簡真分數 $\frac{2}{n}$ 都可以表成兩個相異「單位分數」之和。且其表達式為:

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n+n^2}{2}} \qquad \cdots\cdots \text{ 公式(2)} \quad ,$$

(七). 最簡真分數 $\frac{3}{n}$ 都可以表成三個相異「單位分數」之和。且其表達式分:

(A). 若 $n=3t+2$ 時, $\frac{3}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{n\times\frac{n+1}{3}}$。 $\cdots\cdots$ 公式(3) ,

(B). 若 $n=3t+1$ 時, 又將 n 分為偶數與奇數兩部分:

(1). 當 $n=3t+1$ 且 n 為偶數時：$\dfrac{3}{n}=\dfrac{1}{\frac{n+2}{3}}+\dfrac{1}{n\times\frac{n+2}{6}}$。 …… 公式(4.1) ，

(2). 當 $n=3t+1$ 且 n 為奇數時：則 $\dfrac{3}{n}=\dfrac{1}{\frac{n+2}{3}}+\dfrac{1}{\frac{n+2}{3}\times\frac{n+1}{2}}+\dfrac{1}{n\times\frac{n+2}{3}\times\frac{n+1}{2}}$。 …… 公式(4.2) ，

(八). 最簡真分數 $\dfrac{4}{n}$ 應都可以表成三個相異「單位分數」之和。且其表達式分：

(A). 若 $n=4k+3$ 時， 則 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{\frac{n+1}{4}}+\dfrac{1}{n\times\frac{n+1}{4}}$。…… 公式(5.1)

或 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{\frac{n+5}{4}}+\dfrac{1}{\frac{n+1}{4}\times\frac{n+5}{4}}+\dfrac{1}{n\times\frac{n+1}{4}}$。…… 公式(5.2)

(B). 若 $n=4k+1$ 時, 又細分如下：

(1). 當 $n=4k+1=3t+2=12s+5$ 時：則 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{\frac{n+3}{4}}+\dfrac{1}{\frac{n+3}{4}\times\frac{n+1}{3}}+\dfrac{1}{n\times\frac{n+3}{4}\times\frac{n+1}{3}}$。… 公式(6)

(2). 當 $n=4k+1=3t=12s+9$ 時： 則表達式為：$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{\frac{n+3}{4}}+\dfrac{1}{\frac{n}{3}\times\frac{n+3}{4}}$。 …… 公式(7)

(3). 當 $n=4k+1=3t+1=12s+1$ 時：再 分：(a). $n=24s'+13$ (b). $n=24s'+1$

(a). $\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{4k+1}=\dfrac{4}{3t+1}=\dfrac{4}{12s+1}=\dfrac{4}{24s'+13}$(即 $n=24s'+13$),

則表達式為：$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{\frac{n+3}{4}}+\dfrac{1}{n\times\frac{n+3}{8}}+\dfrac{1}{n\times\frac{n+3}{4}}$。 …… 公式(8)

(b). $\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{4k+1}=\dfrac{4}{3t+1}=\dfrac{4}{12s+1}=\dfrac{4}{24s'+1}$(即 $n=4k+1=24s'+1$) 又分：

(i). $n=168r+1$ (ii). $n=168r+25$ (iii). $n=168r+49$ (iv). $n=168r+73$

(v). $n=168r+97$ (vi). $n=168r+121$ (vii). $n=168r+145$ 等七型：其中

• (iii). $\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{168r+49}$, 表達式為：$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{\frac{n+7}{4}}+\dfrac{1}{n\times\frac{n+7}{28}+1}+\dfrac{1}{n\times\frac{n+7}{28}\times(n\times\frac{n+7}{28}+1)}$

……公式(9)

• (iv). $\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{168r+73}$， 表達式為：$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{\frac{n+7}{4}}+\dfrac{1}{n\times\frac{n+11}{28}}+\dfrac{1}{n\times\frac{n+7}{4}\times\frac{n+11}{28}}$…公式(10)

• (v). $\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{168r+97}$， 表達式為：$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{\frac{n+7}{4}}+\dfrac{1}{\frac{n+7}{4}\times\frac{n+1}{7}}+\dfrac{1}{n\times\frac{n+7}{4}\times\frac{n+1}{7}}$…公式(11)

• $(vii).\ \frac{4}{n}=\frac{4}{168r+145}$， 表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+23}{28}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{8}\times\frac{n+23}{56}}\cdots$公式(12)

又 $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4}{3t+1}=\frac{4}{24s'+1}$ (即 $n=4k+1=24s'+1$) 中

$(i).\ n=168r+1(n=24s'+1)(ii).\ n=168r+25(n=24s'+1)(vi).\ n=168r+121(n=24s'+1)$

三型中:

◆ n 的個位數字為 "7" 者,

表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{10}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{2}}$。…… 公式(13)

◆ n 的個位數字為 "5" 者型:

表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{10}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{2}}$。…… 公式(14)

◆ n 的個位數字為 "5" 者型:

表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{10}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{2}}$。…… 公式(14)

(與個位數字 "7" 者的表達式同)

◆ n 的個位數字為 "3" 者型:

表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{20}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{8}}$。…… 公式(15)

(九). 遺憾的是在 $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}$ 中的 n 經標準分解式後,其質因子為(24的倍數+1)(即 $n=24s'+1$),
又質因子為[$168r+1$ 型] 或 [$168r+25$ 型]或 [$168r+121$ 型]等三型中的一型,且質因子的
個位數字為 "1" 或 "9" 者,我們就有可能無法直接找到三項單位分數之和通用的表達式。
不過,它們仍然可以透過[預備知識]的方法完成各自的表達式。(是否如此?這也正是我們
要敬請教授指導之處)(猜測)。

(十). 最簡真分數 $\frac{4}{n}$ 化成三項單位分數之和表達式的具體操作流程(模式)步驟依序:

(I). 若 $n=4k+3$ 時,則 $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+1}{4}}$。…… 公式(5.1)

或 $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+5}{4}}+\frac{1}{\frac{n+1}{4}\times\frac{n+5}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+1}{4}}$。…… 公式(5.2)

(II). 若 $n=4k+1$ 時,分為如下:

(1). 當 $n=4k+1=3t+2=12s+5$ 時: 則 $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{\frac{n+3}{4}\times\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{4}\times\frac{n+1}{3}}$。⋯公式(6)

(2). 當 $n=4k+1=3t$ 時: 則表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{\frac{n}{3}\times\frac{n+3}{4}}$。 ⋯⋯ 公式(7)

(3). 當 $n=4k+1=3t+1=12s+1$ 時: 再分為: $(a).\ n=24s'+13$ $(b).\ n=24s'+1$

$(a).\ n=4k+1=3t+1=24s'+13$: 表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{8}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{4}}$。公式(8)

$(b).\ n=4k+1=3t+1=24s'+1$ 時: 分 $(i).\ n=168r+1$ $(ii).\ n=168r+25$ $(iii).\ n=168r+49$ $(iv).\ n=168r+73$ $(v).\ n=168r+97$ $(vi).\ n=168r+121$ $(vii).\ n=168r+145$ 等七型:

●$\frac{4}{n}=\frac{4}{168r+49}$,表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{28}+1}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{28}\times(n\times\frac{n+7}{28}+1)}$。 ⋯⋯ 公式(9)

●$\frac{4}{n}=\frac{4}{168r+73}$,表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+11}{28}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{4}\times\frac{n+11}{28}}$。公式(10)

●$\frac{4}{n}=\frac{4}{168r+97}$,表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{\frac{n+7}{4}\times\frac{n+1}{7}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{4}\times\frac{n+1}{7}}$。公式(11)

●$\frac{4}{n}=\frac{4}{168r+145}$,表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+23}{28}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{8}\times\frac{n+23}{56}}$。公式(12)

又 $\frac{4}{n}=\frac{4}{4k+1}=\frac{4}{3t+1}=\frac{4}{24s'+1}=\frac{4}{168r+1}$ 或 $\frac{4}{168r+25}$ 或 $\frac{4}{168r+121}$ 三型中: n 的

◆ 個位數字為"7"者,表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{10}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{2}}$。⋯⋯ 公式(13)

◆ 個位數字為"5"者:表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+3}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{10}}+\frac{1}{n\times\frac{n+3}{2}}$。⋯⋯ 公式(14)

◆ 個位數字為"3"者:表達式為: $\frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+7}{4}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{20}}+\frac{1}{n\times\frac{n+7}{8}}$。⋯⋯ 公式(15)

(III). 最後,在 $n=4k+1$ 時, 若 n 經標準分解式後,質因子都為(24的倍數$+1$)(即$24s'+1$)中的 [$168r+1$型] 或 [$168r+25$ 型]或 [$168r+121$ 型]等三型,且同時個位數字為"1"或"9"者,我們就有可能無法直接找到三項單位分數之和 共用 的表達式。不過,它們仍然可以 透過前述預備知識的方法完成各自的表達式。(猜想)

玖、參考資料：

一. 中華民國第 45 屆中小學科學展覽會作品—「單位分數的探密」

二. 李毓珮著「不知道的世界(數學篇)」(民國 89 年 6 月初版)(凡異出版社)

三. 趙文敏著「淺談數論」(民國 70 年 1 月初版)(書銘出版社)

四. 中華民國第 48 屆中小學科學展覽會作品—「單位分數分解 II」

五. 計算工具網站：

準確計算質因數的標準分解式計算機

https://onlinetoolkit.co/zh/standard-factorization-calculator/