花蓮縣第 63 屆國民中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：倒因為果—圓內接正多邊形的線段倒數定和問題探討

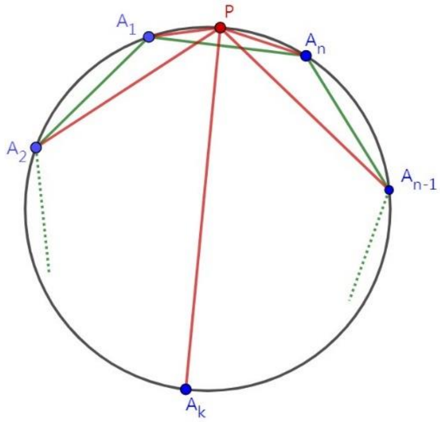
關 鍵 詞：正多邊形外接圓、和差化積

編　　號：

倒因為果—圓內接正多邊形的線段倒數定和問題探討

摘要

本作品是在探討「在正n邊形外接圓上任取一點，則此點到最遠頂點的距離與其它頂點的距離和之比值是否為定值」。主要是利用三角函數中的和差化積公式去推導出定值關係式，接著我們將此點到各頂點的距離取倒數後，進行一些條件的調整，得到另一種形式的線段倒數定和之恆等關係式。

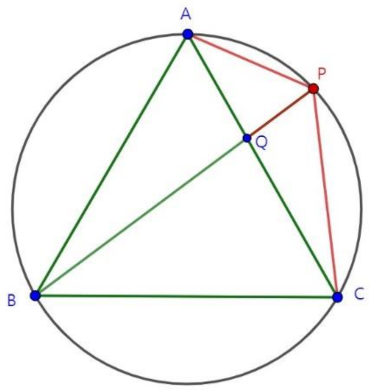


壹、 研究動機

課後輔導課時，老師介紹了一篇第 58 屆全國科展文章(陳姿妤[三])，內容主要是在研究「正n邊形外接圓弧上一動點，至各頂點距離關係的定值性質」。在評審老師的評語中，曾提到可以思考的問題為:「這麼多相似之定理背後是否有一些共同地方？」於是我們就決定往這方向去探討問題。

研究過程中，發現文章(陳姿妤[三])裡的定理證明過程，當角度成等差數列時，若利用三角函數的和差化積公式，可得到一個類似等差中項性質的恆等關係式，而閱讀相關文獻(洪筠皓[二]、劉品蘭[四])後，得知其原問題是科學研習月刊中的一篇文章(游森棚[一])，此問題為「畫正三角形與外接圓，然後在圓上任取一點，則此點到較遠頂點的距離會等於到較近的兩頂點距離和」。我們想將**此點到較遠頂點的距離改為此點到「最」遠頂點的距離**重新進行研究，且定義新的比值關係式，並將其結果推廣到正n邊形，再利用求和符號，得到一個簡潔的一般式。

後來，指導老師建議我們觀察此點到最遠頂點的距離取倒數後與其它頂點的距離取倒數後之和的比值是否為定值？於是我們先用 GGB 軟體畫正三角形及正方形的圖，發現其比值不為定值。一開始很失望，但之後從一本書名為初中數學競賽教程(杜錫錄[五])中發現一個類似的問題，題目為「如下圖，設ΔABC為正三角形，P是外接圓劣弧$\overset{\frown}{AC}$上的一點，若$\overline{BP}$交$\overline{AC}$於Q，求證：$\dfrac{1}{PA}+\dfrac{1}{PC}=\dfrac{1}{PQ}$」。這時，我們如獲靈感，於是做了些修改後，將此線段倒數定和的性質推廣到正n邊形，得到一恆等關係式，於是有了以下的研究。



貳、研究目的

一、探討在正n邊形外接圓上任取一點，則此點到最遠頂點的距離與其它$n-1$個頂點的距離和之比值是否為定值。

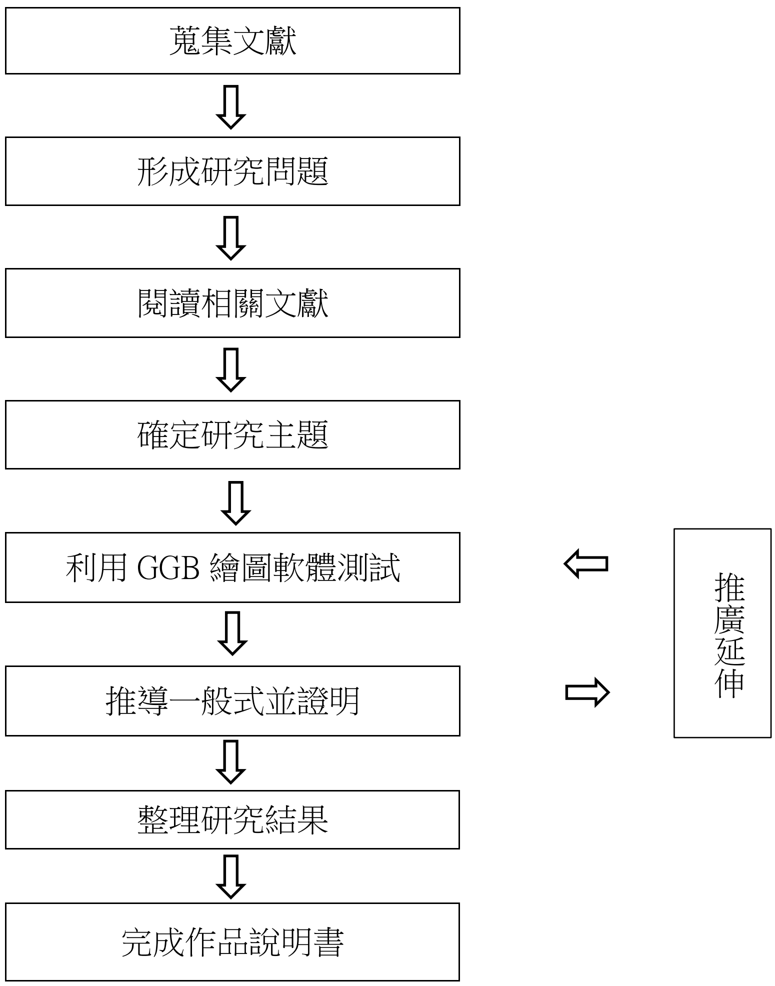
二、探討在正n邊形外接圓上任取一點，則此點到最遠頂點的距離取倒數後與其它$n-1$個頂點的距離取倒數後之和是否存在一恆等關係式。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Geogebra 繪圖軟體。

肆、研究過程或方法

一、研究方法：



二、研究過程：

(一)探討在正n邊形外接圓上任取一點，則此點到最遠頂點的距離與其它$n-1$個頂點的距離和之比值是否為定值。

1.正三角形的情況(如圖 1)：

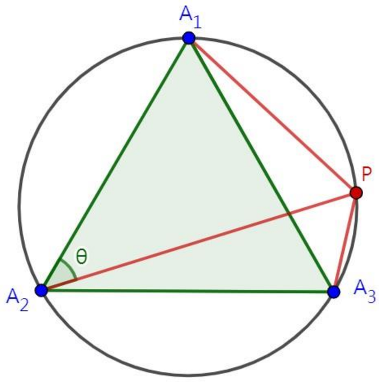


圖 1

不妨設外接圓半徑為R、$\angle PA_2A_1=\theta$，則$\angle PA_3A_2=\dfrac{\pi}{3}+\theta$、$\angle PA_2A_3=\dfrac{\pi}{3}-\theta$，

由正弦定理知，

在ΔPA_1A_2中，$\overline{PA_1}=2R\sin\theta$、

在ΔPA_2A_3中，$\overline{PA_2}=2R\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)$、

在ΔPA_3A_1中，$\overline{PA_3}=2R\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$，

因為$\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)+\left(\dfrac{2\pi}{3}+\theta\right)=\pi$，得$\overline{PA_3}=2R\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)=2R\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\theta\right)$，

所以

$$\frac{\overline{PA_3}+\overline{PA_1}}{\overline{PA_2}}=\frac{2R\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\theta\right)+2R\sin\theta}{2R\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)}$$

$$=\frac{2R\left[\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\theta\right)+\sin\theta\right]}{2R\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)}$$

$$=\frac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)\cos\dfrac{\pi}{3}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)}$$ (和差化積)

$=2\cos\dfrac{\pi}{3}$ 。

□

2.正方形的情況(如圖 2)：為了定義出點 P 到最遠頂點的距離，我們假設 P 離 A_1 較近，則點 P 到最遠頂點的距離即為 $\overline{PA_3}$ 。

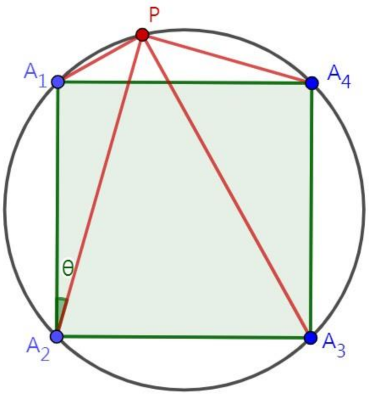


圖 2

不妨設外接圓半徑為 R 、 P 離 A_1 較近，則 $\angle PA_2A_1=\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{8}\right)$ 且

$\angle PA_3A_2=\dfrac{\pi}{4}+\theta$ 、 $\angle PA_4A_3=\dfrac{2\pi}{4}+\theta$ 、 $\angle PA_3A_4=\dfrac{\pi}{4}-\theta$ ，

由正弦定理知，

在 ΔPA_1A_2 中，$\overline{PA_1}=2R\sin\theta$ 、

在 ΔPA_2A_3 中，$\overline{PA_2}=2R\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$ 、

在 ΔPA_3A_4 中，$\overline{PA_3}=2R\sin\left(\dfrac{2\pi}{4}+\theta\right)$ 、

在 ΔPA_4A_1 中，$\overline{PA_4}=2R\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$ ，

因為 $\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)+\left(\dfrac{3\pi}{4}+\theta\right)=\pi$ ，得 $\overline{PA_4}=2R\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=2R\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+\theta\right)$ ，

所以

$$\frac{\overline{PA_4}+\overline{PA_2}+\overline{PA_1}}{\overline{PA_3}}=\frac{2R\left[\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+\theta\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)+\sin\theta\right]}{2R\sin\left(\dfrac{2\pi}{4}+\theta\right)}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{4}+\theta\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\theta}{\sin\left(\frac{2\pi}{4}+\theta\right)}\quad(\text{和差化積})$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{4}+\theta\right)\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{2\pi}{4}+\theta\right)}+\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}+\tan\theta\quad。$$

因為 $\tan\theta$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$ 為遞增函數，

所以 $\dfrac{\overline{PA_4}+\overline{PA_2}+\overline{PA_1}}{\overline{PA_3}}$ 的取值範圍為 $\left(2\cos\frac{\pi}{4},2\cos\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{8}\right)$。

□

3.由正三角形及正方形的推導知，圓內接正 n 邊形的邊長與所對應的圓周角之間，利用正弦定理，可以得到一恆等關係式，故我們給出一個引理，以便之後對證明性質推廣的計算能更簡潔。

> 引理一：
>
> 如圖 3，已知點 P 為正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 外接圓上劣弧 A_1A_n 上一點，連結 $\overline{PA_k}$，$k=1,2,...,n$，設 $\angle PA_2A_1=\theta$，則 $\overline{PA_k}=2R\sin\left(\frac{k-1}{n}\pi+\theta\right)$。

證明：

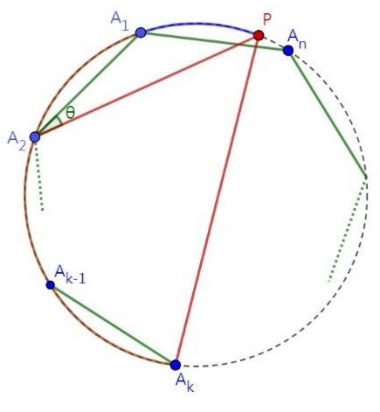


圖 3

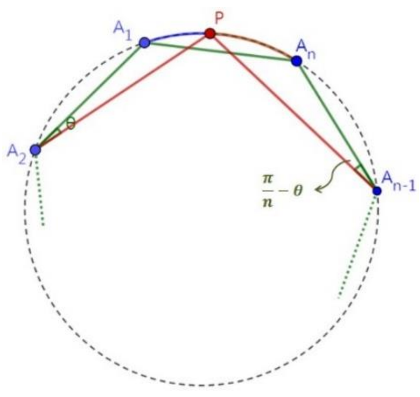


圖 4

不妨設外接圓半徑為 R，

(1)當 $k=1,2,\ldots,n-1$時，$\overline{PA_k}$ 所對應的圓周角為$\dfrac{k-1}{n}\pi+\theta$ (如圖 3)，

由正弦定理知，$\overline{PA_k}=2R\sin\left(\dfrac{k-1}{n}\pi+\theta\right)$。

(2)當 $k=n$時，$\overline{PA_n}$ 所對應的圓周角為$\dfrac{\pi}{n}-\theta$ (如圖 4)，

由正弦定理知，$\overline{PA_n}=2R\sin\left(\dfrac{\pi}{n}-\theta\right)$，

因為$\left(\dfrac{\pi}{n}-\theta\right)+\left(\dfrac{n-1}{n}\pi+\theta\right)=\pi$，所以$\sin\left(\dfrac{\pi}{n}-\theta\right)=\sin\left(\dfrac{n-1}{n}\pi+\theta\right)$，

故$\overline{PA_n}=2R\sin\left(\dfrac{\pi}{n}-\theta\right)=2R\sin\left(\dfrac{n-1}{n}\pi+\theta\right)$，

由(1)、(2)得，$\overline{PA_k}=2R\sin\left(\dfrac{k-1}{n}\pi+\theta\right)$，其中$k=1,2,\ldots,n$ 。

□

4.正五邊形的情況(如圖 5) :

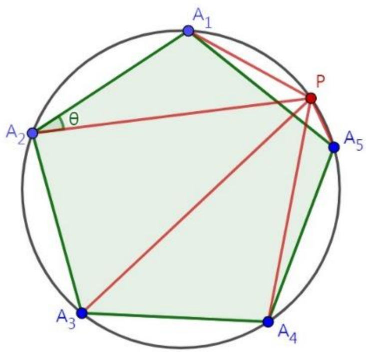


圖 5

不妨設外接圓半徑為 R、$\angle PA_2A_1=\theta$，則

由引理一知，$\overline{PA_k}=2R\sin\left(\dfrac{k-1}{5}\pi+\theta\right)$，$k=1,2,\ldots,5$，

所以

$$\frac{\overline{PA_5}+\overline{PA_4}+\overline{PA_2}+\overline{PA_1}}{\overline{PA_3}}=\frac{2R\left[\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}+\theta\right)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{5}+\theta\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{5}+\theta\right)+\sin\theta\right]}{2R\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}+\theta\right)}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\theta\right)\cos\frac{2\pi}{5}+2\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\theta\right)\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\theta\right)}\quad\text{(和差化積)}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\theta\right)\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\theta\right)}$$

$$=2\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\right)\text{。}$$

利用求和符號得，$\dfrac{\sum_{k=1}^{2}\left(\overline{PA_k}+\overline{PA_{6-k}}\right)}{\overline{PA_3}}=2\sum_{k=1}^{2}\cos\dfrac{k\pi}{5}$ 。

□

5.正六邊形的情況(如圖 6) :

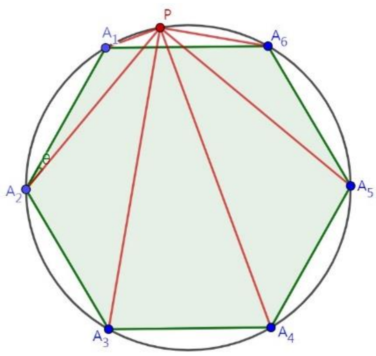


圖 6

不妨設外接圓半徑為 R 、 P 離 A_1 較近及 $\angle PA_2A_1=\theta\in\left(0,\frac{\pi}{12}\right)$ ，

則 P 到最遠頂點的距離即為 $\overline{PA_4}$ 。

由引理一知，$\overline{PA_k}=2R\sin\left(\frac{(k-1)\pi}{6}+\theta\right)$ ，$k=1,2,\dots,6$ ，

所以

$$\frac{\overline{PA_6}+\overline{PA_5}+\overline{PA_3}+\overline{PA_2}+\overline{PA_1}}{\overline{PA_4}}$$

$$=\frac{2R\left[\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\theta\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{6}+\theta\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{6}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)+\sin\theta\right]}{2R\sin\left(\frac{3\pi}{6}+\theta\right)}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{3\pi}{6}+\theta\right)\cos\frac{2\pi}{6}+2\sin\left(\frac{3\pi}{6}+\theta\right)\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{3\pi}{6}+\theta\right)}+\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\quad \text{(和差化積)}$$

$$=2\left(\cos\frac{2\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=2\left(\cos\frac{2\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\right)+\tan\theta\ 。$$

因為 $\tan\theta$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{12}\right)$ 為遞增函數，所以 $\frac{\overline{PA_6}+\overline{PA_5}+\overline{PA_3}+\overline{PA_2}+\overline{PA_1}}{\overline{PA_4}}$ 的取值範圍為

$$\left(2\left(\cos\frac{2\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\right),2\left(\cos\frac{2\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\right)+\tan\frac{\pi}{12}\right)\ 。$$

□

6.至此，我們猜測當正 $2n+1$ 邊形外接圓上任取一點，則此點到最遠頂點的距離與其它 $2n$ 個頂點的距離和之比值是為定值。當正 $2n$ 邊形外接圓上任取一點，則此點到最遠頂點的距離與其它 $2n-1$ 個頂點的距離和之比值不是定值。在推導過程中，若角度成等差數列，利用三角函數的和差化積公式，可得到一個類似等差中項性質的恆等關係式，故我們再給出一個引理，而此引理大大化簡之後定理的證明過程。

引理二：

如圖 7，已知點 P 為正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 外接圓上劣弧 A_1A_n 上一點，連結 $\overline{PA_k}$，$k=1,2,\ldots,n$，設 $\angle PA_2A_1=\theta$，則 $\overline{PA_x}+\overline{PA_y}=2\overline{PA_{\frac{x+y}{2}}}\cos\frac{x-y}{2n}\pi$，其中 $x=1,2,\ldots,n$，$y=1,2,\ldots,n$。即 $\overline{PA_{\frac{x+y}{2}}}=\frac{1}{2}\sec\frac{x-y}{2n}\pi\left(\overline{PA_x}+\overline{PA_y}\right)$。

證明：

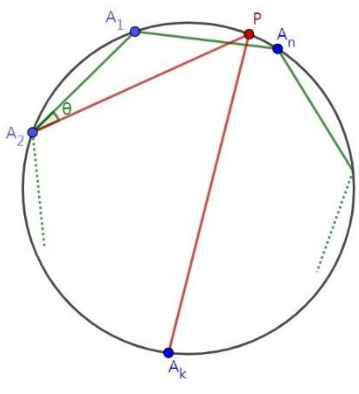


圖 7

不妨設外接圓半徑為 R，

由引理一知，$\overline{PA_k}=2R\sin\left(\frac{k-1}{n}\pi+\theta\right)$，$k=1,2,\ldots,n$，

所以

$$\overline{PA_x}+\overline{PA_y}=2R\left[\sin\left(\frac{x-1}{n}\pi+\theta\right)+\sin\left(\frac{y-1}{n}\pi+\theta\right)\right]$$

$$=2R\cdot 2\sin\left(\frac{x+y-2}{2n}\pi+\theta\right)\cos\frac{x-y}{2n}\pi \quad \text{(和差化積)}$$

$$=2\cdot 2R\sin\left(\frac{\frac{x+y}{2}-1}{n}\pi+\theta\right)\cos\frac{x-y}{2n}\pi$$

$$=2\overline{PA_{\frac{x+y}{2}}}\cos\frac{x-y}{2n}\pi \quad \text{(引理一)。}$$

□

7.由正三角形及正五邊形的推導，我們猜測正 $2n+1$ 邊形的結論並給予證明。

定理一：
如圖 8，設點 P 為正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$ 外接圓上劣弧 A_1A_{2n+1} 上一動點，連結 $\overline{PA_k}$，$k=1,2,\ldots,2n+1$，則 $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{PA_k}+\overline{PA_{2n+2-k}}\right)}{\overline{PA_{n+1}}}=2\sum_{k=1}^{n}\cos\dfrac{k\pi}{2n+1}$。

證明：

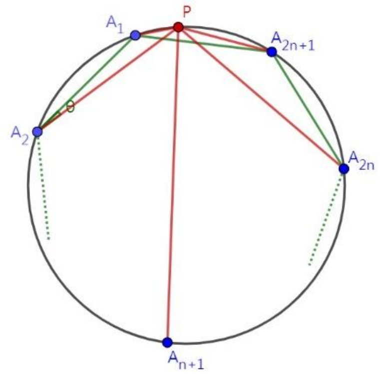


圖 8

不妨設外接圓半徑為 R、$\angle PA_2A_1=\theta$，則

由引理一知，$\overline{PA_k}=2R\sin\left(\frac{k-1}{2n+1}\pi+\theta\right)$，$k=1,2,\ldots,2n+1$，

所以

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{PA_k}+\overline{PA_{2n+2-k}}\right)}{\overline{PA_{n+1}}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}2\overline{PA_{n+1}}\cos\frac{n+1-k}{2n+1}\pi}{\overline{PA_{n+1}}}\quad(\text{引理二})$$

$$=\frac{2\overline{PA_{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{n+1-k}{2n+1}\pi}{\overline{PA_{n+1}}}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{n+1-k}{2n+1}\pi$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}\quad。$$

□

8.由正方形及正六邊形的推導，我們猜測正$2n$邊形的結論並給予證明。

定理二：

如圖 9，已知點P為正$2n$邊形$A_1A_2\cdots A_{2n}$外接圓上劣弧A_1A_{2n}上一點且離A_1較近，

連結$\overline{PA_k}$，$k=1,2,\ldots,2n$，則$\dfrac{\overline{PA_1}+\sum_{k=2}^{n}\left(\overline{PA_k}+\overline{PA_{2n+2-k}}\right)}{\overline{PA_{n+1}}}$的取值範圍為

$\left(2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n},2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}+\tan\frac{\pi}{4n}\right)$。

證明：

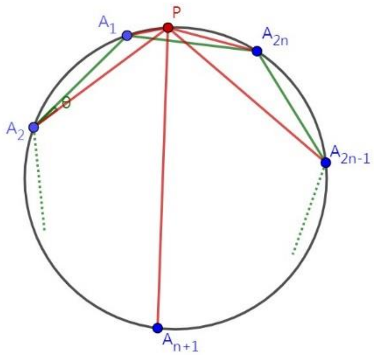


圖 9

不妨設外接圓半徑為R、$\angle PA_2A_1=\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4n}\right)$，則

由正弦定理知，$\overline{PA_k}=2R\sin\left(\dfrac{k-1}{2n}\pi+\theta\right)$，$k=1,2,\ldots,2n$，

所以

$$\frac{\overline{PA_1}+\sum_{k=2}^{n}\left(\overline{PA_k}+\overline{PA_{2n+2-k}}\right)}{\overline{PA_{n+1}}}=\frac{\sum_{k=2}^{n}2\overline{PA_{n+1}}\cos\frac{n+1-k}{2n}\pi}{\overline{PA_{n+1}}}+\frac{2R\sin\theta}{2R\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\quad\text{(引理二)}$$

$$=\frac{2\overline{PA_{n+1}}\sum_{k=2}^{n}\cos\frac{n+1-k}{2n}\pi}{\overline{PA_{n+1}}}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=2\sum_{k=2}^{n}\cos\frac{n+1-k}{2n}\pi+\tan\theta$$

$$=2\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}+\tan\theta\quad。$$

因為 $\tan\theta$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4n}\right)$ 為遞增函數，

所以 $\frac{\overline{PA_1}+\sum_{k=2}^{n}\left(\overline{PA_k}+\overline{PA_{2n+2-k}}\right)}{\overline{PA_{n+1}}}$ 的取值範圍為 $\left(2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n},2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}+\tan\frac{\pi}{4n}\right)$ 。

□

(二)探討在正 n 邊形外接圓上任取一點，則此點到最遠頂點的距離之倒數與其它 $n-1$ 個頂點的距離之倒數和是否相等。

透過 GGB 繪圖軟體發現，在正三角形外接圓上任取一點，則此點到最遠頂點的距離取倒數與另兩個頂點的距離取倒數後之和並不會相等。在找相關資料時，發現一本書(杜錫錄[五])中提到類似取倒數和會為定值的文章，於是就改往這方面研究，經過適當的調整，從而得到某種取倒數後會有恆等式的關係，以下是我們的探討過程。

1.正三角形的情況(如圖 10) :

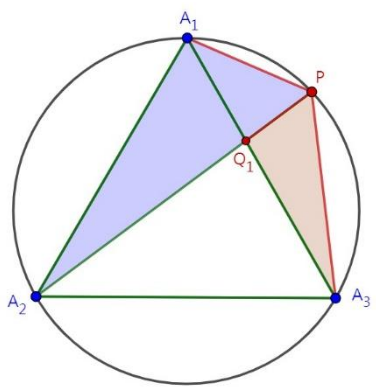


圖 10

設 $\overline{PA_2}$ 交 $\overline{A_1A_3}$ 於點 Q_1，如圖 10，

在 ΔPA_1A_2 、 ΔPQ_1A_3 中，

因為 $\angle PA_2A_1 = \angle PA_3Q_1 = \frac{1}{2}PA_1$ 且 $\angle A_1PA_2 = \angle A_3PQ_1 = \frac{\pi}{3}$ ，

所以 $\Delta PA_1A_2 \sim \Delta PQ_1A_3$ (AA 相似)，

得 $\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_2}} = \frac{\overline{PQ_1}}{\overline{PA_3}}$ ，

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3} = \overline{PQ_1}\cdot\overline{PA_2}$$

$$= \overline{PQ_1}\cdot\left(\overline{PA_1}+\overline{PA_3}\right) \quad \text{(引理二)，}$$

故 $\frac{1}{\overline{PQ_1}} = \frac{1}{\overline{PA_1}} + \frac{1}{\overline{PA_3}}$ 。

□

2.正方形的情況(如圖 11) :

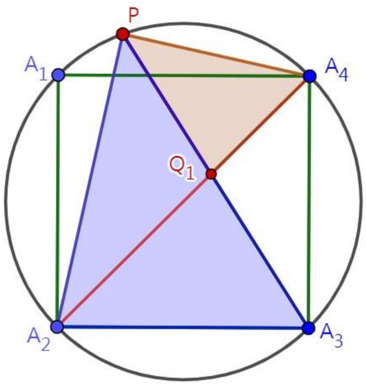


圖 11

設 $\overline{PA_3}$ 交 $\overline{A_2A_4}$ 於點 Q_1 ，如圖 11

在 ΔPA_2A_3 、 ΔPQ_1A_4 中，

因為 $\angle PA_3A_2 = \angle PA_4Q_1 = \frac{1}{2}PA_2$ 且 $\angle A_2PA_3 = \angle A_4PQ_1 = \frac{\pi}{4}$ ，

所以 $\Delta PA_2A_3 \sim \Delta PQ_1A_4$ (AA 相似)，

得 $\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}} = \frac{\overline{PQ_1}}{\overline{PA_4}}$ ，

$$\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4} = \overline{PQ_1}\cdot\overline{PA_3}$$

$$= \overline{PQ_1}\cdot\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{4}\left(\overline{PA_2}+\overline{PA_4}\right) \quad \text{(引理二)，}$$

故$\dfrac{1}{\overline{PQ_1}}=\dfrac{1}{2}\sec\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{\overline{PA_2}}+\dfrac{1}{\overline{PA_4}}\right)$。

□

3.正五邊形的情況：

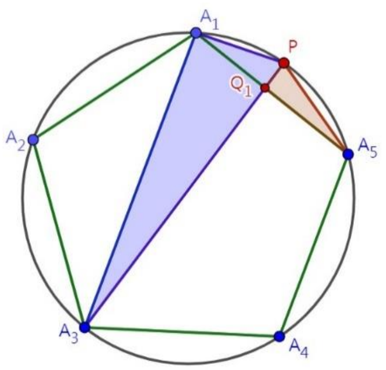


圖 12

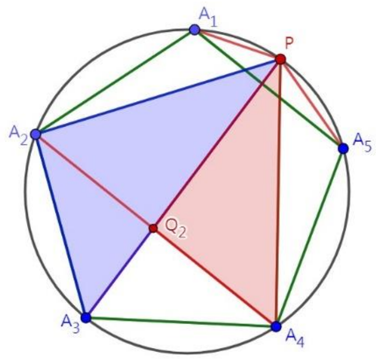


圖 13

(1)設$\overline{PA_3}$交$\overline{A_1A_5}$於點Q_1，如圖 12，

在ΔPA_1A_3、ΔPQ_1A_5中，

因為$\angle PA_3A_1=\angle PA_5Q_1=\dfrac{1}{2}PA_1$且$\angle A_1PA_3=\angle A_5PQ_1=\dfrac{2\pi}{5}$，

所以$\Delta PA_1A_3\sim\Delta PQ_1A_5$ (AA 相似)，

得$\dfrac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_3}}=\dfrac{\overline{PQ_1}}{\overline{PA_5}}$，

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_5}=\overline{PQ_1}\cdot\overline{PA_3}$$

$$=\overline{PQ_1}\cdot\frac{1}{2}\sec\frac{2\pi}{5}\left(\overline{PA_1}+\overline{PA_5}\right)\quad\text{(引理二)，}$$

故$\dfrac{1}{\overline{PQ_1}}=\dfrac{1}{2}\sec\dfrac{2\pi}{5}\left(\dfrac{1}{\overline{PA_1}}+\dfrac{1}{\overline{PA_5}}\right)$。

(2)設$\overline{PA_3}$交$\overline{A_2A_4}$於點Q_2，如圖 13，

在ΔPA_2A_3、ΔPQ_2A_4中，

因為$\angle PA_3A_2=\angle PA_4Q_2=\dfrac{1}{2}PA_2$且$\angle A_2PA_3=\angle A_4PQ_2=\dfrac{\pi}{5}$，

所以$\Delta PA_2A_3\sim\Delta PQ_2A_4$ (AA 相似)，

得$\dfrac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}}=\dfrac{\overline{PQ_2}}{\overline{PA_4}}$，

$$\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}=\overline{PQ_2}\cdot\overline{PA_3}$$

$$=\overline{PQ_2}\cdot\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{5}\left(\overline{PA_2}+\overline{PA_4}\right)$$ (引理二)，

故 $\dfrac{1}{\overline{PQ_2}}=\dfrac{1}{2}\sec\dfrac{\pi}{5}\left(\dfrac{1}{\overline{PA_2}}+\dfrac{1}{\overline{PA_4}}\right)$ 。

由(1)、(2)知，

$$\frac{1}{\overline{PQ_1}}+\frac{1}{\overline{PQ_2}}=\frac{1}{2}\left[\sec\frac{2\pi}{5}\left(\frac{1}{\overline{PA_1}}+\frac{1}{\overline{PA_5}}\right)+\sec\frac{\pi}{5}\left(\frac{1}{\overline{PA_2}}+\frac{1}{\overline{PA_4}}\right)\right]$$ 。

利用求和符號，得 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\overline{PQ_k}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sec\frac{3-k}{5}\pi\left(\frac{1}{\overline{PA_k}}+\frac{1}{\overline{PA_{6-k}}}\right)$ 。

□

4.正六邊形的情況：

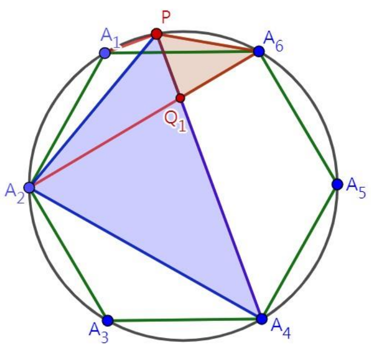


圖 14

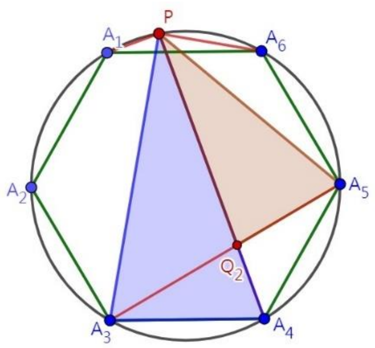


圖 15

(1)設 $\overline{PA_4}$ 交 $\overline{A_2A_6}$ 於點 Q_1 ，如圖 14，

在 ΔPA_2A_4 、 ΔPQ_1A_6 中，

因為 $\angle PA_4A_2=\angle PA_6Q_1=\frac{1}{2}\overset{\frown}{PA_2}$ 且 $\angle A_2PA_4=\angle A_6PQ_1=\dfrac{2\pi}{6}$ ，

所以 $\Delta PA_2A_4\sim\Delta PQ_1A_6$ (AA 相似)，

得 $\dfrac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_4}}=\dfrac{\overline{PQ_1}}{\overline{PA_6}}$ ，

$$\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_6}=\overline{PQ_1}\cdot\overline{PA_4}$$

$$=\overline{PQ_1}\cdot\frac{1}{2}\sec\frac{2\pi}{6}\left(\overline{PA_2}+\overline{PA_6}\right)$$ (引理二)，

故 $\dfrac{1}{\overline{PQ_1}}=\dfrac{1}{2}\sec\dfrac{2\pi}{6}\left(\dfrac{1}{\overline{PA_2}}+\dfrac{1}{\overline{PA_6}}\right)$ 。

(2)設 $\overline{PA_4}$ 交 $\overline{A_3A_5}$ 於點 Q_2 ，如圖 15，

在 ΔPA_3A_4 、 ΔPQ_2A_5 中，

因為 $\angle PA_4A_3 = \angle PA_5Q_2 = \frac{1}{2}PA_3$ 且 $\angle A_3PA_4 = \angle A_5PQ_2 = \frac{\pi}{6}$ ，

所以 $\Delta PA_3A_4 \sim \Delta PQ_2A_5$ (AA 相似)，

得 $\frac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_4}} = \frac{\overline{PQ_2}}{\overline{PA_5}}$ ，

$$\begin{aligned}\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_5} &= \overline{PQ_2}\cdot\overline{PA_4}\\ &= \overline{PQ_2}\cdot\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{6}\left(\overline{PA_3}+\overline{PA_5}\right) \quad \text{(引理二)，}\end{aligned}$$

故 $\frac{1}{\overline{PQ_2}} = \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{\overline{PA_3}}+\frac{1}{\overline{PA_5}}\right)$ 。

由(1)、(2)知，

$$\frac{1}{\overline{PQ_1}}+\frac{1}{\overline{PQ_2}} = \frac{1}{2}\left[\sec\frac{2\pi}{6}\left(\frac{1}{\overline{PA_2}}+\frac{1}{\overline{PA_6}}\right)+\sec\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{\overline{PA_3}}+\frac{1}{\overline{PA_5}}\right)\right] 。$$

利用求和符號，得 $\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\overline{PQ_k}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sec\frac{3-k}{6}\pi\left(\frac{1}{\overline{PA_{k+1}}}+\frac{1}{\overline{PA_{7-k}}}\right)$ 。

□

5.由正三角形及正五邊形的推導，我們猜測正 $2n+1$ 邊形的結論並給予證明。

> 定理三：
>
> 如圖 16，設點 P 為正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$ 外接圓上劣弧 A_1A_{2n+1} 上一動點，連結 $\overline{PA_{n+1}}$ 交 $\overline{A_kA_{2n+2-k}}$ 於 Q_k ，$k=1,2,\ldots,n$，則 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\overline{PQ_k}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sec\frac{n+1-k}{2n+1}\pi\left(\frac{1}{\overline{PA_k}}+\frac{1}{\overline{PA_{2n+2-k}}}\right)$ 。

證明：

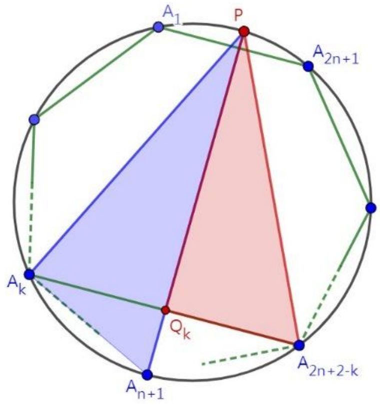


圖 16

設 $\overline{PA_{n+1}}$ 交 $\overline{A_kA_{2n+2-k}}$ 於點 Q_k ，$k=1,2,...,n$，如圖 16，

在 ΔPA_kA_{n+1} 、 ΔPQ_kA_{2n+2-k} 中，

因為 $\angle PA_{n+1}A_k=\angle PA_{2n+2-k}Q_k=\dfrac{1}{2}PA_k$ 且 $\angle A_kPA_{n+1}=\angle A_{2n+2-k}PQ_k=\dfrac{(n+1-k)\pi}{2n+1}$

所以 $\Delta PA_kA_{n+1}\sim\Delta PQ_kA_{2n+2-k}$ (AA 相似)，

得 $\dfrac{\overline{PA_k}}{\overline{PA_{n+1}}}=\dfrac{\overline{PQ_k}}{\overline{PA_{2n+2-k}}}$ ，

$$\begin{aligned}\overline{PA_k}\cdot\overline{PA_{2n+2-k}}&=\overline{PQ_k}\cdot\overline{PA_{n+1}}\\&=\overline{PQ_k}\cdot\frac{1}{2}\sec\frac{n+1-k}{2n+1}\pi\left(\overline{PA_k}+\overline{PA_{2n+2-k}}\right)\quad\text{(引理二)，}\end{aligned}$$

故 $\dfrac{1}{\overline{PQ_k}}=\dfrac{1}{2}\sec\dfrac{n+1-k}{2n+1}\pi\left(\dfrac{1}{\overline{PA_k}}+\dfrac{1}{\overline{PA_{2n+2-k}}}\right)$ ，

得 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\overline{PQ_k}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sec\frac{n+1-k}{2n+1}\pi\left(\frac{1}{\overline{PA_k}}+\frac{1}{\overline{PA_{2n+2-k}}}\right)$ 。

□

6.由正方形及正六邊形的推導，我們猜測正 $2n$ 邊形的結論並給予證明。

> 定理四：
>
> 如圖 17，設點 P 為正 $2n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 外接圓上劣弧 A_1A_{2n} 上一動點，連結 $\overline{PA_{n+1}}$ 交 $\overline{A_{k+1}A_{2n+1-k}}$ 於 Q_k ，$k=1,2,...,n-1$，則 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\overline{PQ_k}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sec\frac{n-k}{2n}\pi\left(\frac{1}{\overline{PA_{k+1}}}+\frac{1}{\overline{PA_{2n+1-k}}}\right)$ 。

證明：

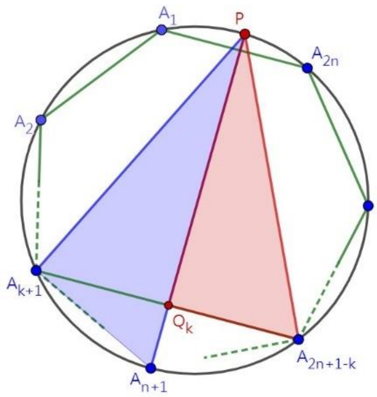


圖 17

設 $\overline{PA_{n+1}}$ 交 $\overline{A_{k+1}A_{2n+1-k}}$ 於點 Q_k ， $k=1,2,...,n-1$ ，如圖 17，

在 $\Delta PA_{k+1}A_{n+1}$ 、 ΔPQ_kA_{2n+1-k} 中，

因為 $\angle PA_{n+1}A_{k+1}=\angle PA_{2n+1-k}Q_k=\frac{1}{2}PA_{k+1}$ 且 $\angle A_{k+1}PA_{n+1}=\angle A_{2n+1-k}PQ_k=\frac{(n-k)\pi}{n}$

所以 $\Delta PA_{k+1}A_{n+1}\sim\Delta PQ_kA_{2n+1-k}$ (AA 相似)，

得 $\dfrac{\overline{PA_{k+1}}}{\overline{PA_{n+1}}}=\dfrac{\overline{PQ_k}}{\overline{PA_{2n+1-k}}}$ ，

$$\overline{PA_{k+1}}\cdot\overline{PA_{2n+1-k}}=\overline{PQ_k}\cdot\overline{PA_{n+1}}$$

$$=\overline{PQ_k}\cdot\frac{1}{2}\sec\frac{n-k}{2n}\pi\left(\overline{PA_{k+1}}+\overline{PA_{2n+1-k}}\right)\quad\text{(引理二)，}$$

故 $\dfrac{1}{\overline{PQ_k}}=\dfrac{1}{2}\sec\dfrac{n-k}{2n}\pi\left(\dfrac{1}{\overline{PA_{k+1}}}+\dfrac{1}{\overline{PA_{2n+1-k}}}\right)$ ，

即 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\overline{PQ_k}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sec\frac{n-k}{2n}\pi\left(\frac{1}{\overline{PA_{k+1}}}+\frac{1}{\overline{PA_{2n+1-k}}}\right)$ 。

□

伍、研究結果

一、設點 P 為正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$ 外接圓劣弧 A_1A_{2n+1} 上一動點，連結 $\overline{PA_k}$ ，

$k=1,2,...,2n+1$，則 $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{PA_k}+\overline{PA_{2n+2-k}}\right)}{\overline{PA_{n+1}}}=2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}$ 。

二、設點 P 為正 $2n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 外接圓劣弧 A_1A_{2n} 上一點且離 A_1 較近，連結 $\overline{PA_k}$ ，

$k=1,2,...,2n$ ，則 $\dfrac{\overline{PA_1}+\sum_{k=2}^{n}\left(\overline{PA_k}+\overline{PA_{2n+2-k}}\right)}{\overline{PA_{n+1}}}$ 的取值範圍為

$\left(2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n},2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}+\tan\frac{\pi}{4n}\right)$ 。

三、設點 P 為正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$ 外接圓劣弧 A_1A_{2n+1} 上一動點，連結 $\overline{PA_{n+1}}$ 交

$\overline{A_kA_{2n+2-k}}$ 於 Q_k ， $k=1,2,...,n$ ，則 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\overline{PQ_k}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sec\frac{n+1-k}{2n+1}\pi\left(\frac{1}{\overline{PA_k}}+\frac{1}{\overline{PA_{2n+2-k}}}\right)$ 。

四、設點 P 為正 $2n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 外接圓劣弧 A_1A_{2n} 上一動點，連結 $\overline{PA_{n+1}}$ 交

$\overline{A_{k+1}A_{2n+1-k}}$ 於 Q_k ， $k=1,2,...,n-1$ ，則 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\overline{PQ_k}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sec\frac{n-k}{2n}\pi\left(\frac{1}{\overline{PA_{k+1}}}+\frac{1}{\overline{PA_{2n+1-k}}}\right)$ 。

陸、討論

我們探討在正n邊形外接圓上任取一點，將「**此點到較遠頂點的距離與其它頂點的距離和之比值**」改為「**此點到最遠頂點的距離與其它頂點的距離和之比值**」後，其比值問題也是可以延伸到正n邊形討論。在推導過程中，發現當比值式裡的角度成等差中項關係時，其比值即為定值，例如：在正五邊形$A_1A_2\cdots A_5$外接圓劣弧A_1A_5上任取一點P，除了$\dfrac{\overline{PA_5}+\overline{PA_4}+\overline{PA_2}+\overline{PA_1}}{\overline{PA_3}}$為定值外，其實$\dfrac{\overline{PA_5}+\overline{PA_1}}{\overline{PA_3}}$、$\dfrac{\overline{PA_4}+\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}}$也都是定值。故無論是較遠還是最遠頂點的距離與其它頂點的距離和之比值問題，其核心原理都是一樣，利用角度成等差中項的性質推得定值關係式。

此作品與其它參考文章有顯著的不同是除了討論線段比值問題外，我們還探討了線段倒數定和問題且將結果推廣到正n邊形上，這些繁瑣的證明過程都能依靠我們給出的引理及求和符號推導而得到有規律且簡潔的一般式。

柒、結論與未來展望

目前已將正n邊形外接圓上線段倒數定和問題探討完，未來希望可以將條件放寬或推廣到空間上，針對各項可能成為定值的條件進行研究。

捌、參考資料及其他

一、游森棚(106)。正三角形的線段定和。科學研習月刊。第56卷第10期。

二、洪筠皓、楊潯、王苙暄(民110)，正多邊形的線段定和性質探討，中華民國金門地區第61屆中小學科學展覽會作品說明書。國中數學組。

三、陳姿妤、蕭妤真(民107)，方「圓」百里，必「定」無敵。中華民國第58屆中小學科學展覽會作品說明書。高中數學組。

四、劉品蘭、陳嘉翎、楊舒絢(民110)，圓內接正多邊形的線段定和。中華民國第61屆中小學科學展覽會作品說明書。高中數學組。

五、杜錫錄、顏鎮軍、余紅兵(民84)，初中數學競賽教程。第37講 正三角形的魔法(276頁)。新竹市 : 凡異出版社。

六、洪有情主編(民111)。國中數學三上(2版)。新北市：康軒。

七、許志農主編(民110)。高中數學2。台北：龍騰文化。

八、許志農主編(民110)。高中數學3。台北：龍騰文化。