

摘要

平衡鳥是我們常見的童玩之一，其中蘊含著許多的數學原理，當然也結合了許多生活上的應用，本研究是先利用廢棄的影印紙來折平衡鳥，透過實際動手操作，找出影響平衡鳥的因素，研究過程中發現平衡鳥平衡與否和翅膀長短、鳥嘴大小、紙張大小都有很大的相關，透過實際操作找出其相關性，之後再結合數學原理來解釋為何翅膀長短、鳥嘴大小、紙張大小會影響平衡鳥的平衡與斜角變化，沒想到簡單的一張廢棄不用的影印紙居然隱藏了這麼多神奇的奧秘，仔細觀察，便能發現，生活中充滿數學，希望大家也能跟我們一起玩數學！

壹、研究動機

每個學期末我們都會幫老師整理回收箱，每每都會發現回收箱裡有廢棄的影印紙，看著他們被丟進回收桶，深深覺得可惜，於是我們開始思考這些回收的影印紙是否還有其他用處，有些同學拿來折盒子、有些同學拿來折飛機，在眾多成品中我們發現了一個很特別的摺紙，居然是一



隻能夠站立在木棍上的紙鳥，這時引起了大家的好奇心，我們嘗試利用不同大小的影印紙折出平衡鳥，發現平衡鳥的平衡角度會因紙張大小和長短而改變，於是我們試著找出它們之間的規律。

貳、研究目的與研究問題

我們想藉由實際動手操作找出影響平衡鳥平衡的因素，再利用生活中隨手可得、不同大小的影印紙折出平衡鳥，並找出平衡鳥翅膀長短與平衡角度的關係，進而找出其重心變化！

- 一、找出不同尺寸影印紙的平衡鳥翅膀長短與平衡角度的關係。
- 二、找出 A3、A4、B4、B5 的平衡鳥依序減短翅膀的展開圖的關係。
- 三、找出相同長度的鳥嘴與不同大小尺寸影印紙的平衡鳥的關係。
- 四、找出 A3、A4、B4、B5 不同尺寸的平衡鳥重心的位置。
- 五、找出 A3、A4、B4、B5 不同尺寸的平衡鳥的鳥嘴、身體、翅膀面積的比例。

參、解釋名詞

平衡鳥

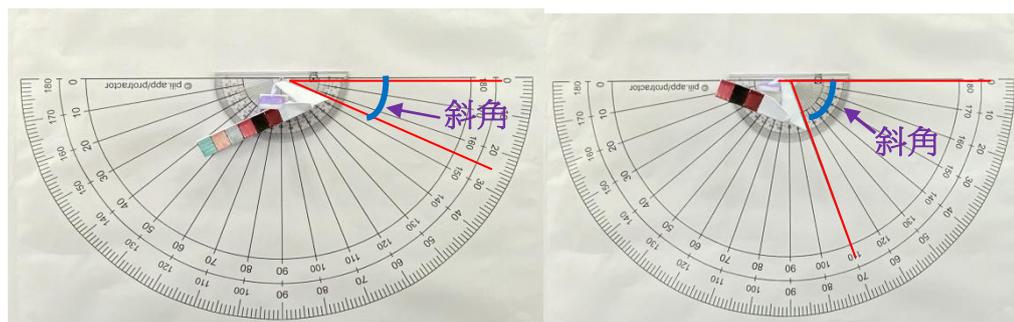
外形如展翅飛翔的鳥，以鳥尖尖的鳥喙(鳥嘴)作為支撐點，使之隨意頂立在任何地方，即使是一個小尖點上，它一樣能維持平衡，或繞著固定的物體上旋轉且維持平衡，直到回到原來的平衡狀態。

穩定平衡

平衡鳥處於平衡狀態時，稍微推一下，平衡鳥會稍有偏轉但馬上又會回復到原先平衡的狀態，其斜角各方面都不會因為碰觸而改變。

斜角

平衡鳥身體傾斜的角度，也就是平衡鳥身體與量角器零度的夾角



斜率

X軸代表減少的公分數

Y軸代表斜角的度數

$$\text{斜率} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\text{斜角的變化}}{\text{翅膀長短的變化}}$$

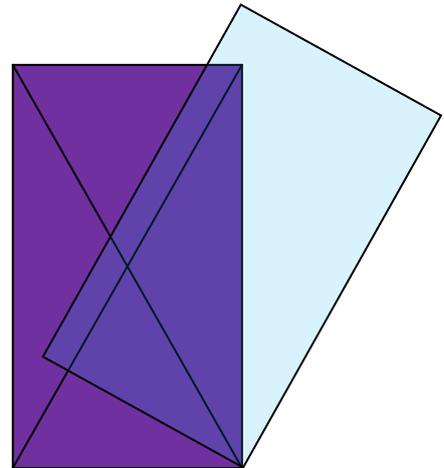
肆、預備知識

重心

物體各部分受重力作用結果，可視為總重力作用於物體上某點，其效果（對於運動的影響）相同，則此點即稱為該物體的重心，亦指物體各部分所受重力的合力的作用點。

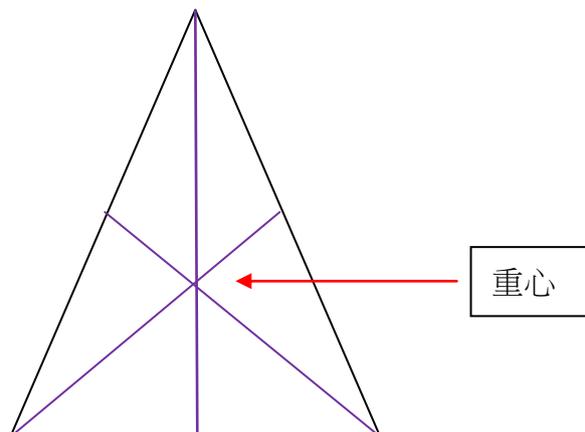
重心與平衡

物體受外力作用而略微傾斜時，通過重心之鉛垂線落於底面積之範圍內，物體受到重力之力矩作用仍然可以恢復原狀，但是通過重心之鉛垂線超過底面積之範圍時，物體即會傾倒。

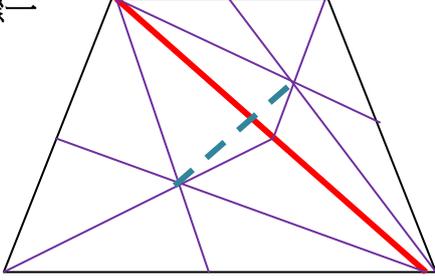
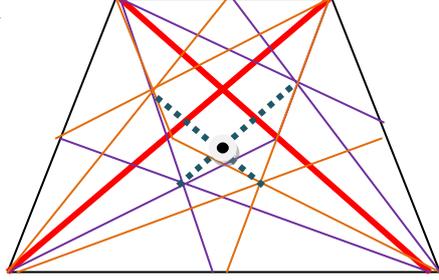


三角形重心的求法

三中線的連線



四邊形重心的求法

<p>步驟一</p> 	<p>步驟二</p> 
<p>首先找出四邊形其中一條對角線 將四邊形分成兩個三角形 分別找出上下兩個三角形的重心 找出這兩個三角形重心的連線</p>	<p>再找出另外一條對角線 將一個四邊形分成兩個三角形 分別找出上下兩個三角形的重心 找出這兩個三角形重心的連線 即可找到四邊形的重心</p>

斜率

斜率一般會以 m 表示，定義為 y 軸的改變除以 x 軸所對應的改變， m 是改變的比例。對於直角座標系，若橫軸為 x 軸，縱軸是 y 軸， m 通常寫成

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

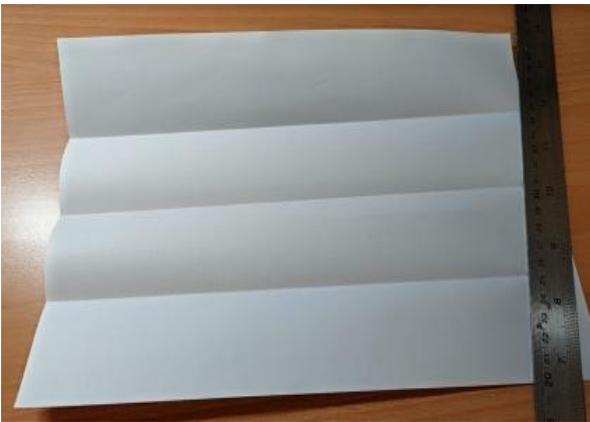
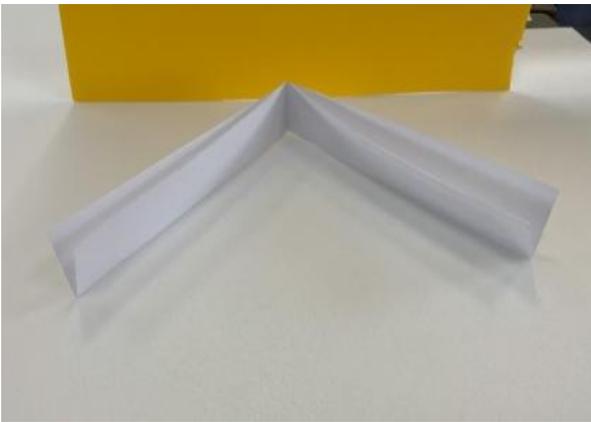
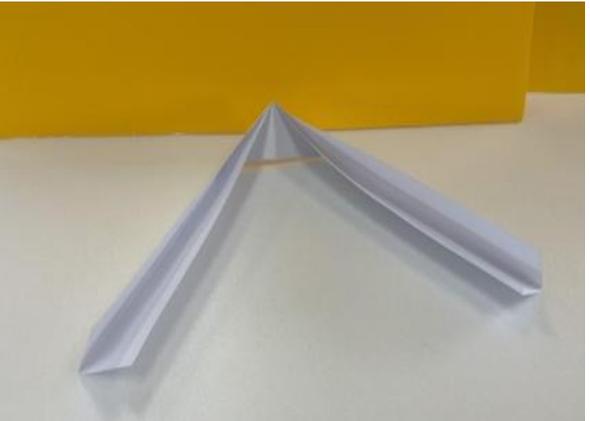
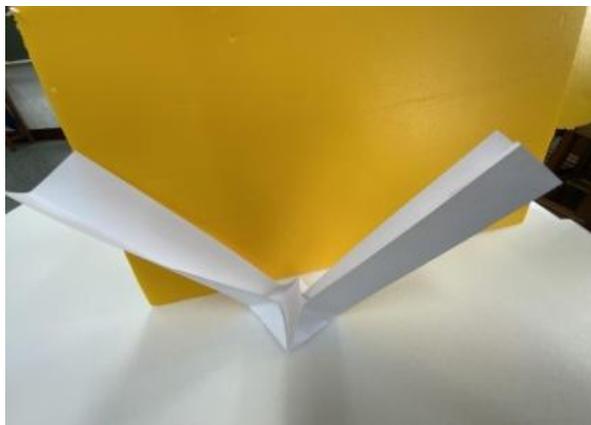
(x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 是直線上任意兩點的座標。不論使用直線上哪兩點，其得出來的斜率都是一樣的。斜率越大，它和橫軸（水平線）形成的夾角（稱為斜角）也越大。

R^2 判定係數

判定係數，又叫決定係數，在這裡我們只用來判定線性回歸解釋力好壞的指標。 R^2 的範圍為 0~1，越接近 1，表示擬合度越好，可解釋程度較高。

伍、研究過程與方法

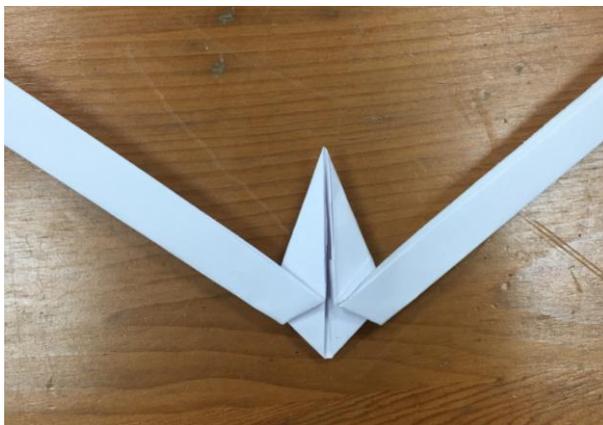
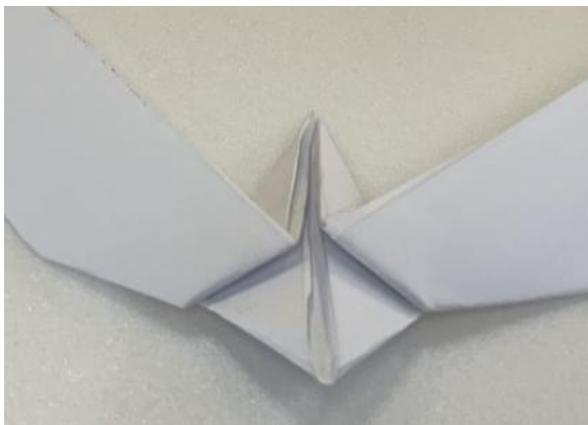
平衡鳥的摺法

	
<p>取一張 A4 影印紙，對折之後再對折一次，平分成四等分，取其中一等分</p>	<p>將四分之一 A4 紙張的短邊先對折，再對折長邊，對折時要把邊線對齊，摺線也要壓緊</p>
	
<p>先將左邊的紙沿著中線往下折，再將右邊的紙沿著中線往下折（兩邊的紙向中間對折）</p>	<p>將紙張打開，會看到紙張中間是一個菱形的摺痕</p>
	
<p>接著換個方向，沿著長邊的菱形折線往裡面折，折出一個垂直於底部的長條紙</p>	<p>再換另一邊，沿著長邊的菱形折線往裡面折，折出另一個垂直於底部的長條紙</p>



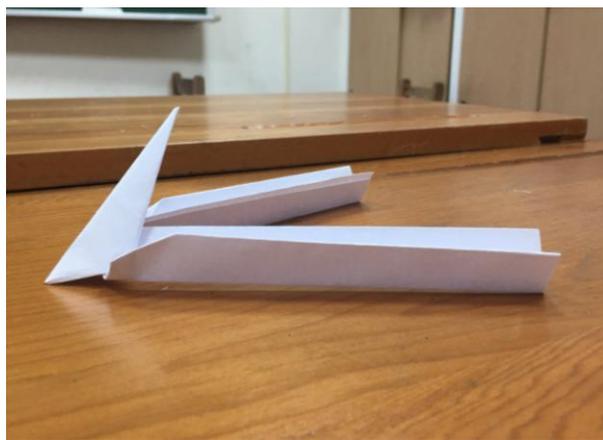
完成以上兩步驟之後，將兩翅膀折向同一邊
(任意一側皆可以)

再將二條斜邊分別折向中線折，斜邊與中線
對齊，壓平



接著將兩長邊沿著斜線往上折，折出平衡鳥
的翅膀

分別將兩邊的鳥翅對折，如上圖



再將平衡鳥的身體對折

最後折出鳥嘴



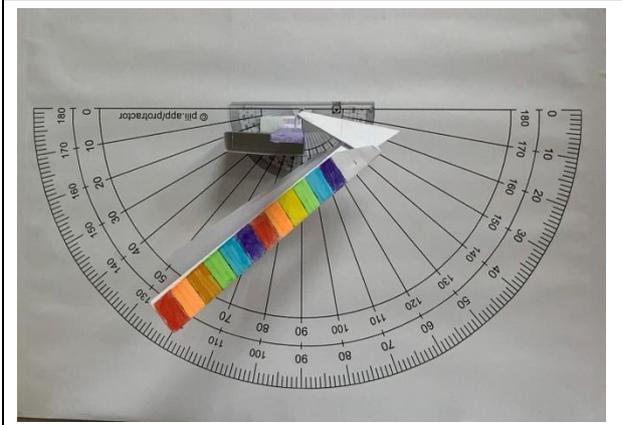
塗上顏色



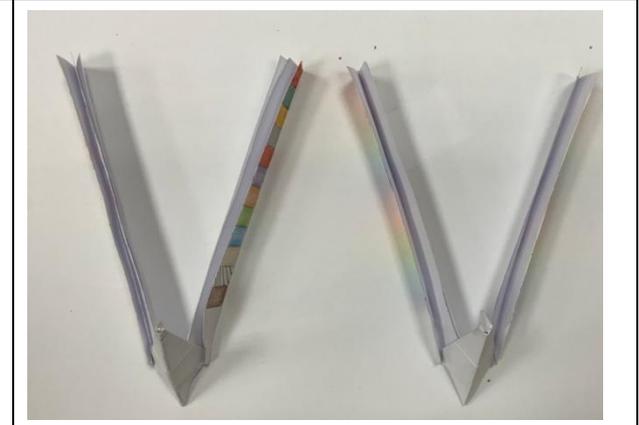
平衡了

測量方式

首先製作一個大的量角器，在量角器上固定一中柱，此中柱必須與量角器垂直，以方便測量，在放置平衡鳥時須將平衡鳥的鳥嘴對準量角器中心，最後測量其斜角大小。



量角器上固定一中柱，此中柱必須與量角器垂直



測量前確定每一隻平衡鳥的翅膀張開角度是一樣的

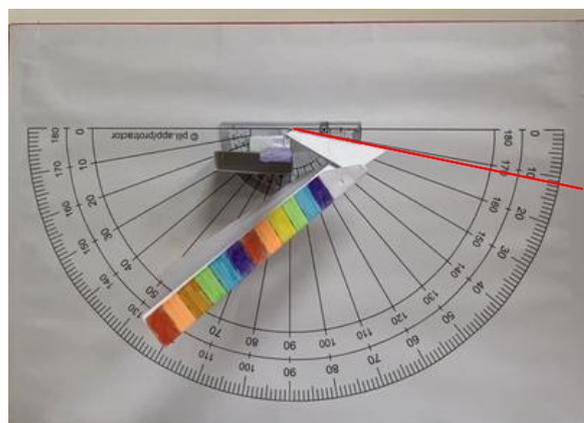
問題一：找出不同尺寸的平衡鳥翅膀長短與平衡角度的關係

用影印紙折出不同長度鳥嘴的平衡鳥，使其穩定平衡後，觀察翅膀長短與斜角的關係。在測量前必須將平衡鳥的身體角度固定，每次測量都必須測量雙翅間的夾角是否相同，避免影響平衡，在鳥嘴的部分則是加入三秒膠固定，接著依序減短平衡鳥的翅膀，一次剪短一公分（照片上一種顏色代表一公分），觀察鳥嘴長度、翅膀長短與斜角的關係。

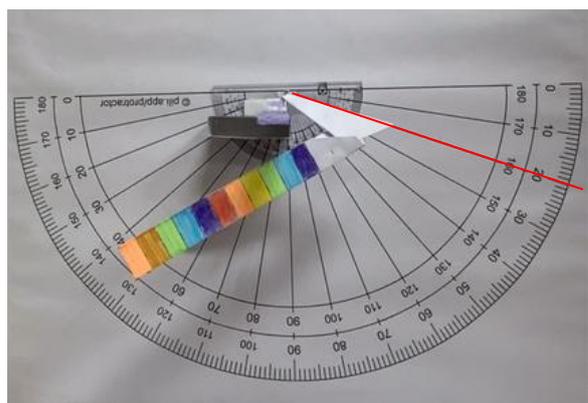
一、以下是以 A3 影印紙，鳥嘴 1 公分為例，其測量的步驟如下：



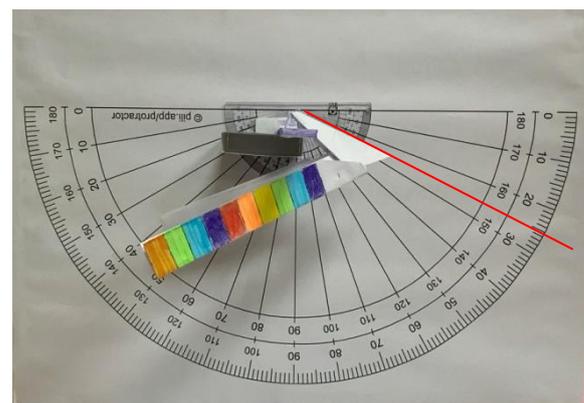
完整的平衡鳥



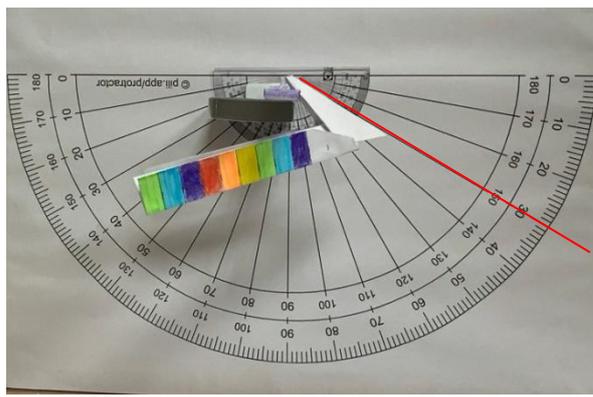
翅膀減 0 公分，斜角為 11°



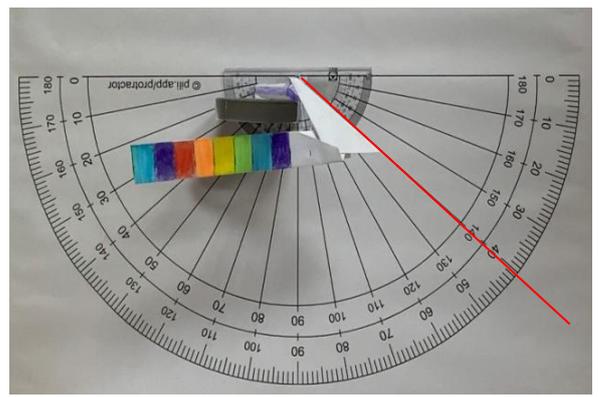
翅膀減 1 公分，斜角為 20°



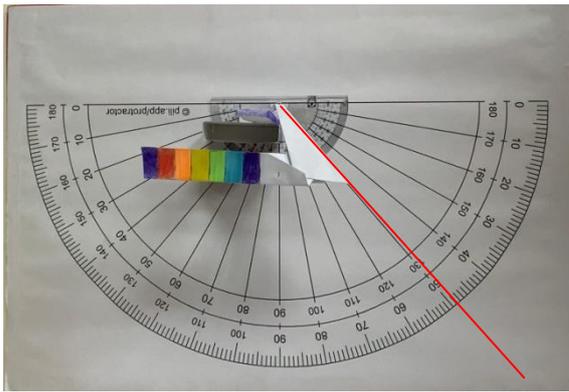
翅膀減 2 公分，斜角為 25°



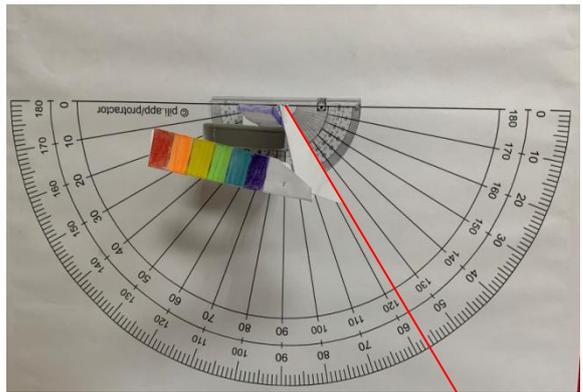
翅膀減 3 公分，斜角為 30°



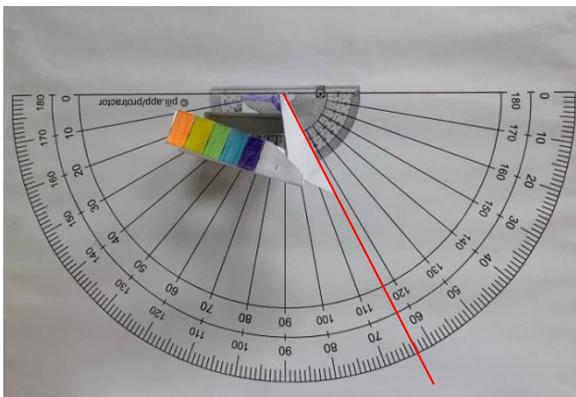
翅膀減 4 公分，斜角為 40°



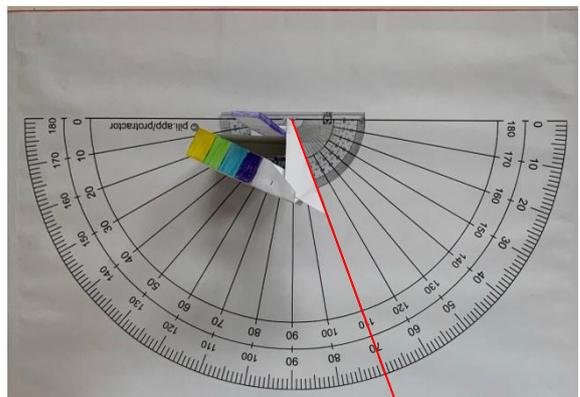
翅膀減 5 公分，斜角為 48°



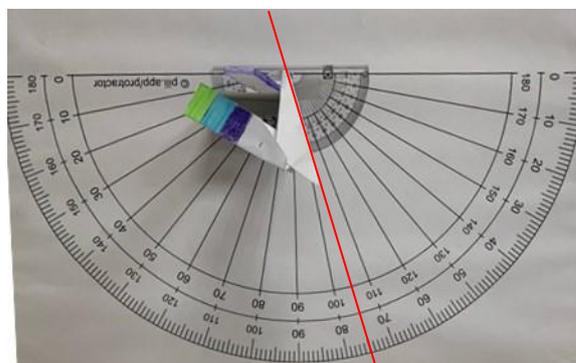
翅膀減 6 公分，斜角為 57°



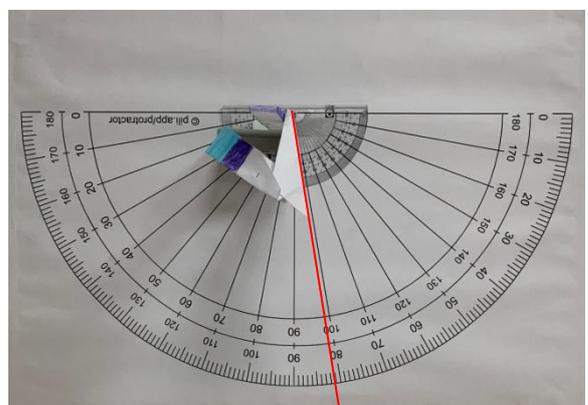
翅膀減 7 公分，斜角為 63°



翅膀減 8 公分，斜角為 70°



翅膀減 9 公分，斜角為 75°

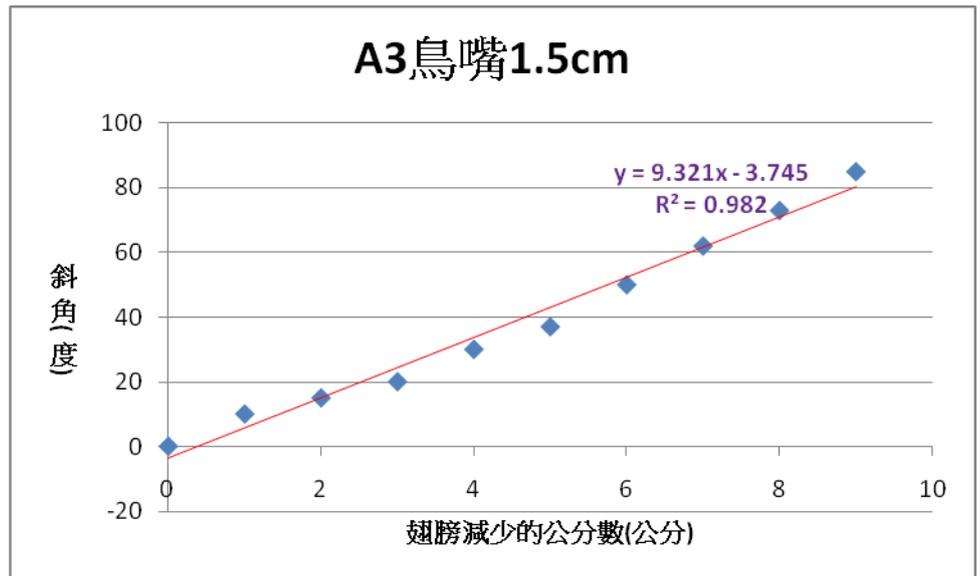


翅膀減 10 公分，不可平衡

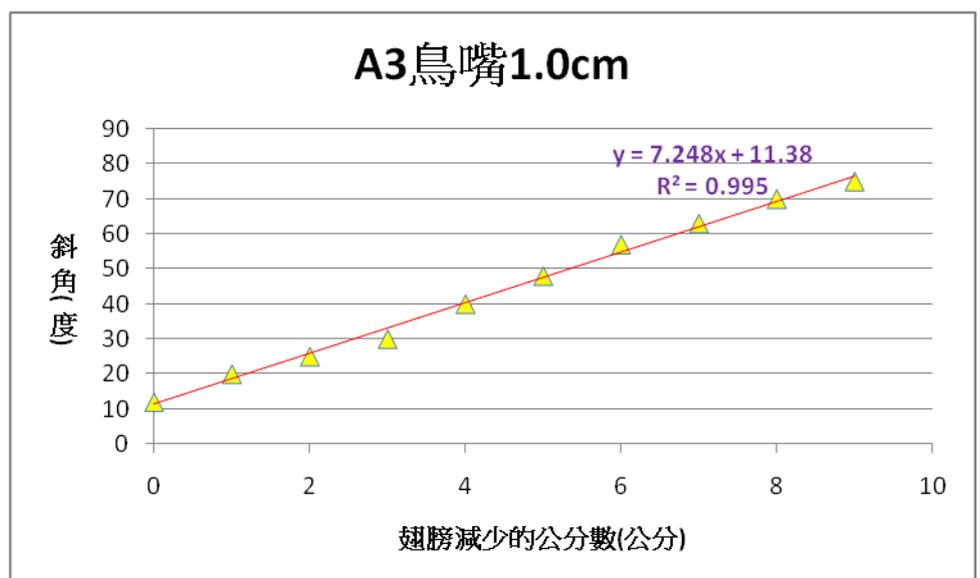
二、分別整理 A3、A4、B4、B5 的鳥嘴 1.5 公分、1.0 公分、0.5 公分的平衡狀態

依照上述方法，我們分別用影印紙折出不同長度的鳥嘴的平衡鳥，測量其翅膀長短與斜角的關係，每一種平衡鳥街都會測量至少三次以上，穩定平衡後測量其斜角大小，斜角誤差約在 1~3 度之間，取其平均值，並將結果整理如下表：

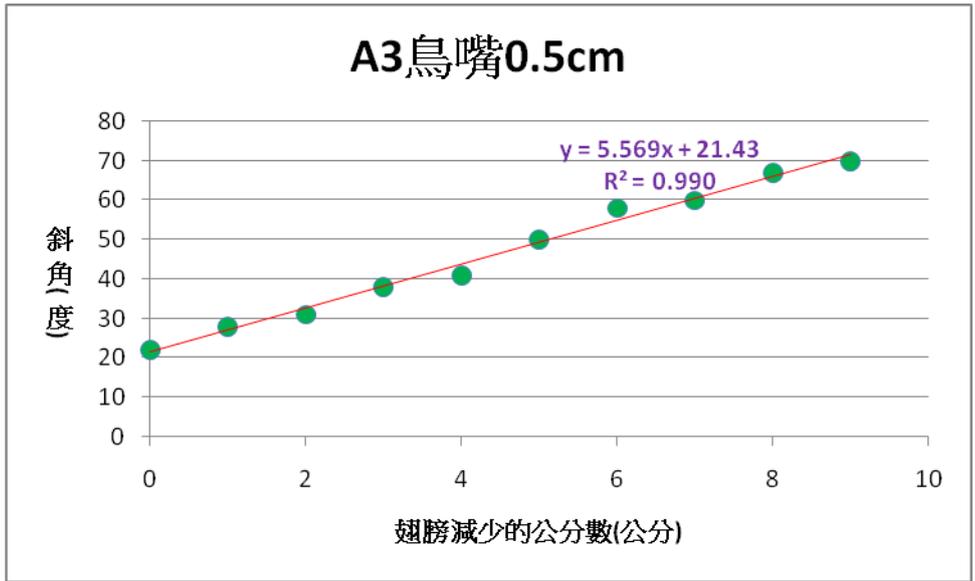
A3(鳥嘴 1.5cm)	
翅膀減少 的公分數	斜角 (度)
0cm	0
1cm	10
2cm	15
3cm	20
4cm	30
5cm	37
6cm	50
7cm	62
8cm	73
9cm	85



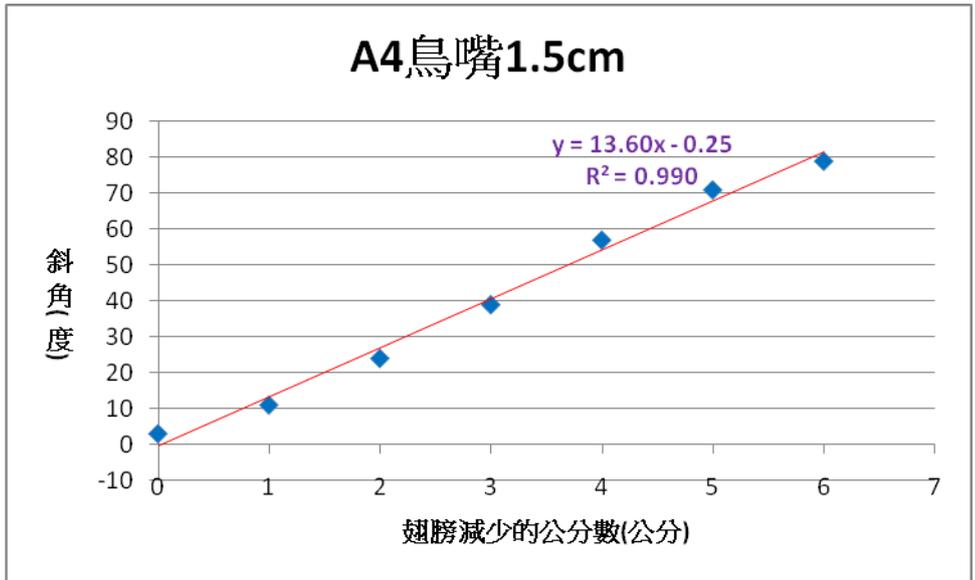
A3(鳥嘴 1cm)	
翅膀減少 的公分數	斜角 (度)
0cm	12
1cm	20
2cm	25
3cm	30
4cm	40
5cm	48
6cm	57
7cm	63
8cm	70
9cm	75



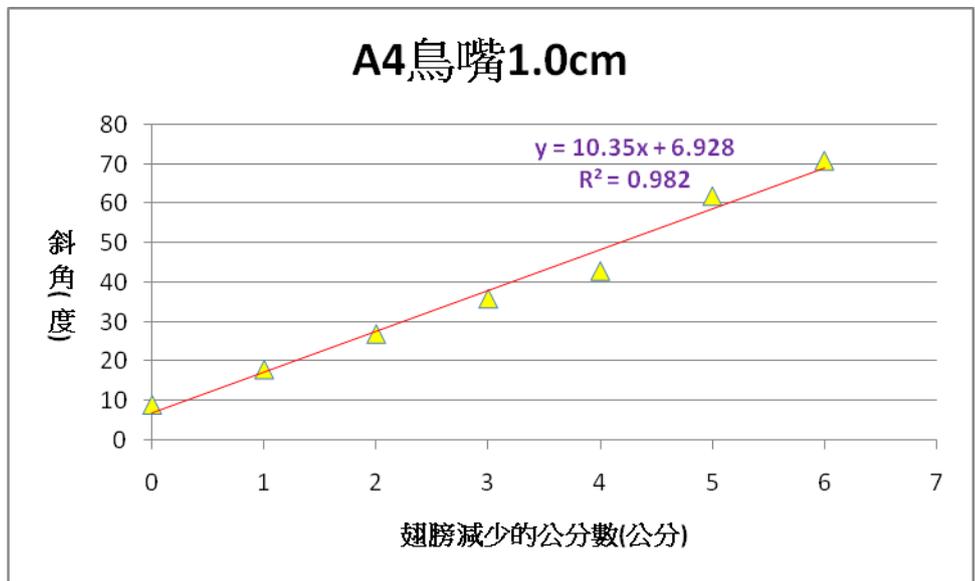
A3(鳥嘴 0.5cm)	
翅膀減少 的公分數	斜角 (度)
0cm	22
1cm	28
2cm	31
3cm	38
4cm	41
5cm	50
6cm	58
7cm	60
8cm	67
9cm	70



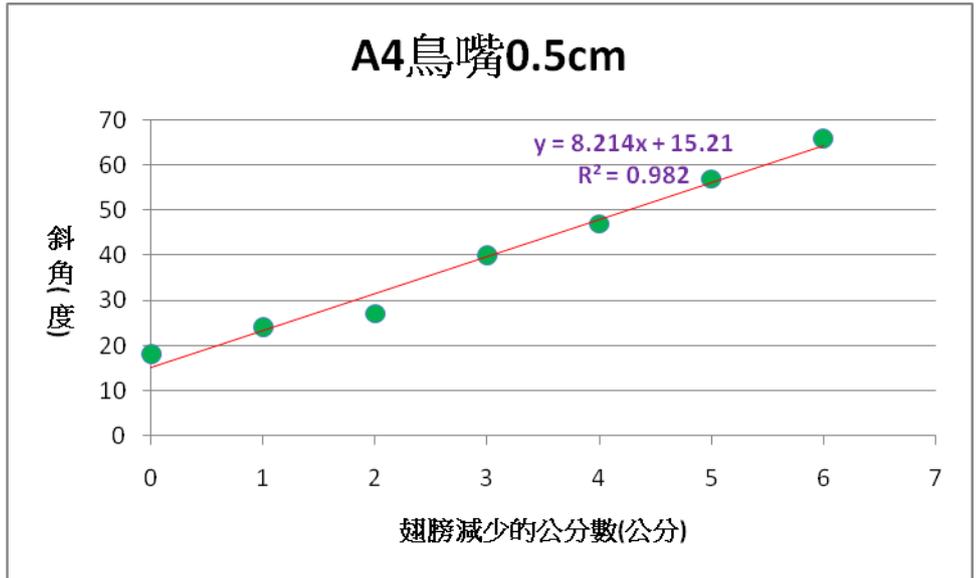
A4(鳥嘴 1.5cm)	
翅膀減少 的公分數	斜角 (度)
0cm	3
1cm	11
2cm	24
3cm	39
4cm	57
5cm	71
6cm	79
7cm	不可平衡
8cm	不可平衡



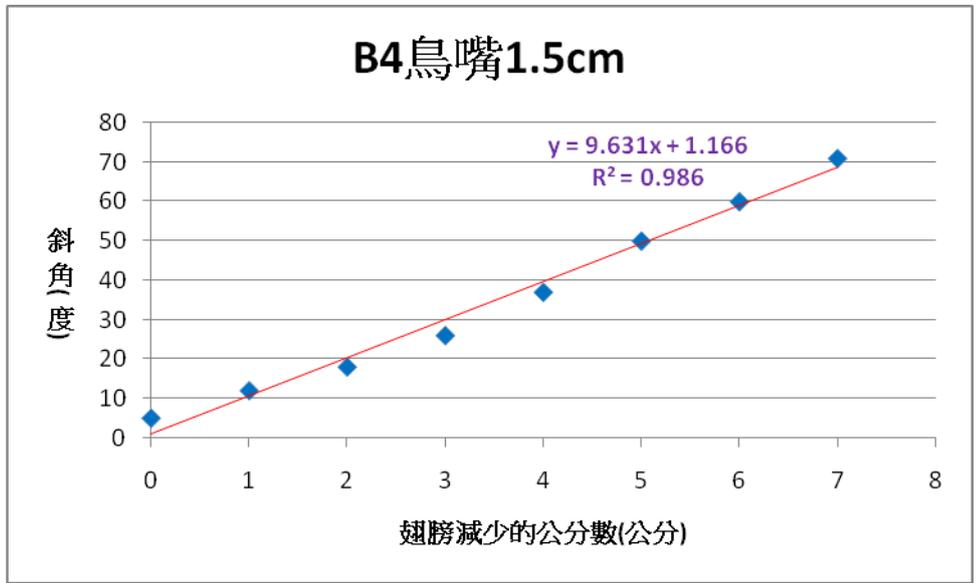
A4(鳥嘴 1.0cm)	
翅膀減少 的公分數	斜角 (度)
0cm	9
1cm	18
2cm	27
3cm	36
4cm	43
5cm	62
6cm	71
7cm	不可平衡



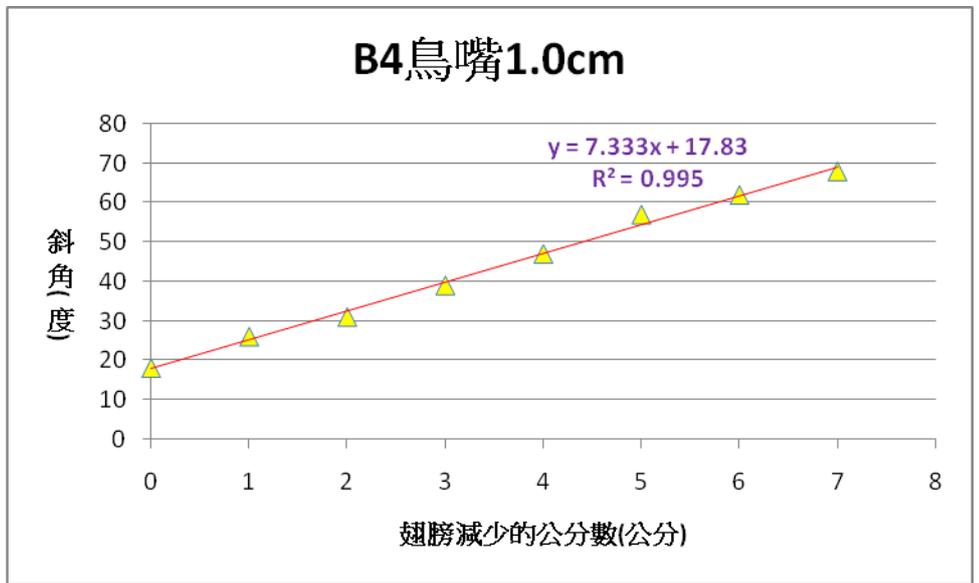
A4(鳥嘴 0.5cm)	
翅膀減少 的公分數	斜角 (度)
0cm	18
1cm	24
2cm	27
3cm	40
4cm	47
5cm	57
6cm	66
7cm	不可平衡
8cm	不可平衡



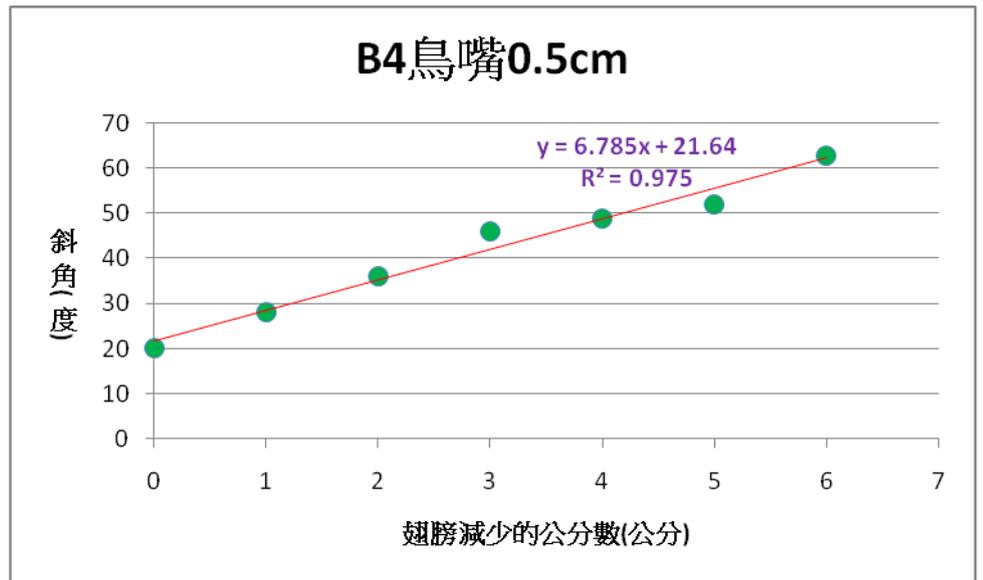
B4(鳥嘴 1.5cm)	
翅膀減少 的公分數	斜角 (度)
0cm	5
1cm	12
2cm	18
3cm	26
4cm	37
5cm	50
6cm	60
7cm	71
8cm	不可平衡



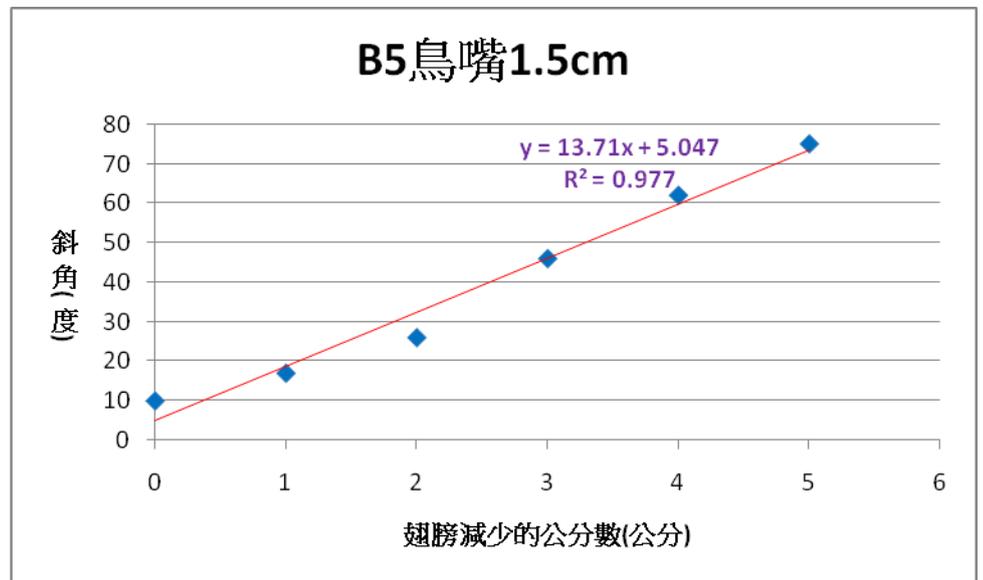
B4(鳥嘴 1cm)	
翅膀減少 的公分數	斜角 (度)
0cm	18
1cm	26
2cm	31
3cm	39
4cm	47
5cm	57
6cm	62
7cm	68
8cm	不可平衡



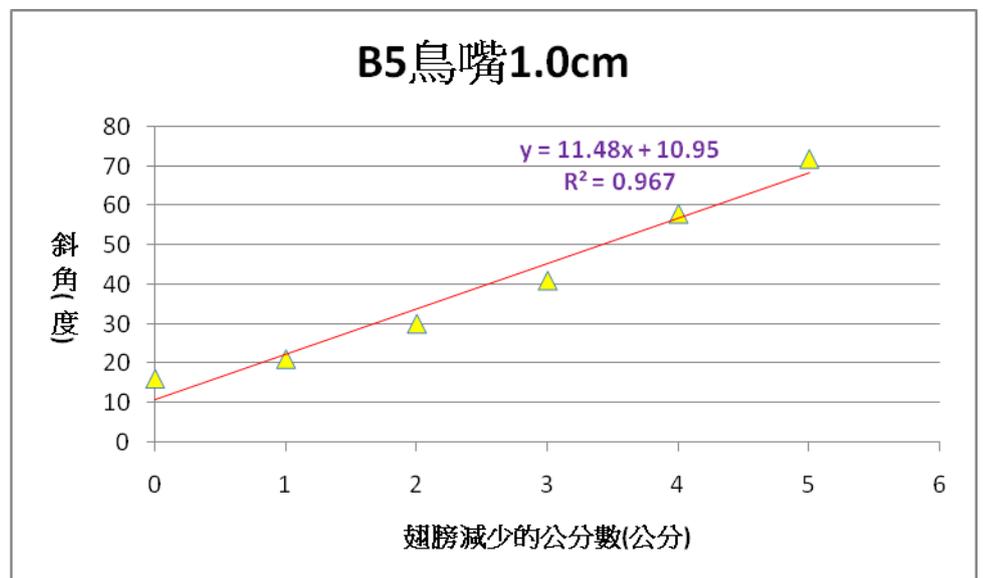
B4(鳥嘴 0.5cm)	
翅膀減少 的公分數	斜角 (度)
0cm	20
1cm	28
2cm	36
3cm	46
4cm	49
5cm	52
6cm	63
7cm	不可平衡
8cm	不可平衡



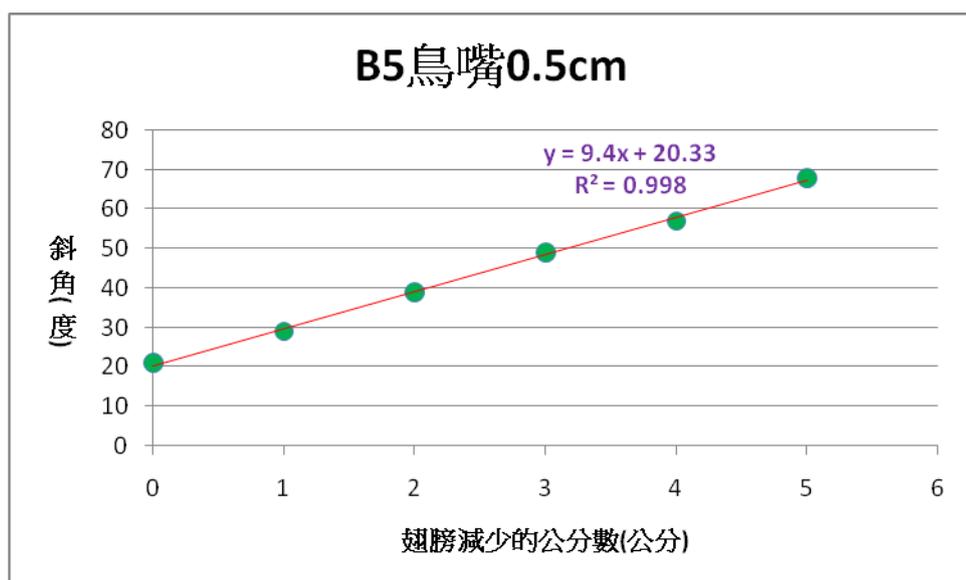
B5(鳥嘴 1.5cm)	
翅膀減少 的公分數	斜角 (度)
0cm	10
1cm	17
2cm	26
3cm	46
4cm	62
5cm	75
6cm	不可平衡
7cm	不可平衡
8cm	不可平衡



B5(鳥嘴 1cm)	
翅膀減少 的公分數	斜角 (度)
0cm	16
1cm	21
2cm	30
3cm	41
4cm	58
5cm	72
6cm	不可平衡
7cm	不可平衡
8cm	不可平衡



B5(鳥嘴 0.5cm)	
翅膀減少 的公分數	斜角 (度)
0cm	21
1cm	29
2cm	39
3cm	49
4cm	57
5cm	68
6cm	不可平衡
7cm	不可平衡
8cm	不可平衡
9cm	不可平衡



三、斜角整理

A3 影印紙				A4 影印紙			
翅膀減少 的公分數	1.5cm 斜角	1.0cm 斜角	0.5cm 斜角	翅膀減少 的公分數	1.5cm 斜角	1.0cm 斜角	0.5cm 斜角
0cm	0	12	22	0cm	3	9	18
1cm	10	20	28	1cm	11	18	24
2cm	15	25	31	2cm	24	27	27
3cm	20	30	38	3cm	39	36	40
4cm	30	40	41	4cm	57	43	47
5cm	37	48	50	5cm	71	62	57
6cm	50	57	58	6cm	79	71	66
7cm	62	63	60	7cm	無法平衡	無法平衡	無法平衡
8cm	73	70	67	8cm	無法平衡	無法平衡	無法平衡
9cm	85	75	70	9cm	無法平衡	無法平衡	無法平衡

B4 影印紙				B5 影印紙			
翅膀減少 的公分數	1.5cm 斜角	1.0cm 斜角	0.5cm 斜角	翅膀減少 的公分數	1.5cm 斜角	1.0cm 斜角	0.5cm 斜角
0cm	5	18	20	0cm	10	16	21
1cm	12	26	28	1cm	17	21	29
2cm	18	31	36	2cm	26	30	39
3cm	26	39	46	3cm	46	41	49
4cm	37	47	49	4cm	62	58	57
5cm	50	57	52	5cm	75	72	68
6cm	60	62	63	6cm	無法平衡	無法平衡	無法平衡
7cm	71	68	無法平衡	7cm	無法平衡	無法平衡	無法平衡
8cm	無法平衡	無法平衡	無法平衡	8cm	無法平衡	無法平衡	無法平衡
9cm	無法平衡	無法平衡	無法平衡	9cm	無法平衡	無法平衡	無法平衡

四、斜率比較

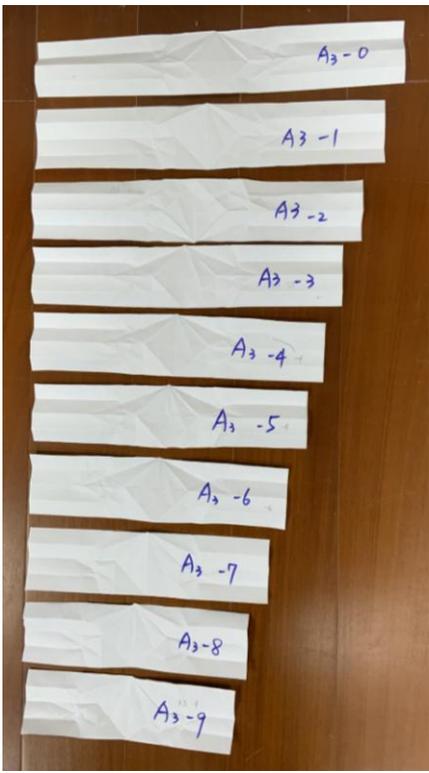
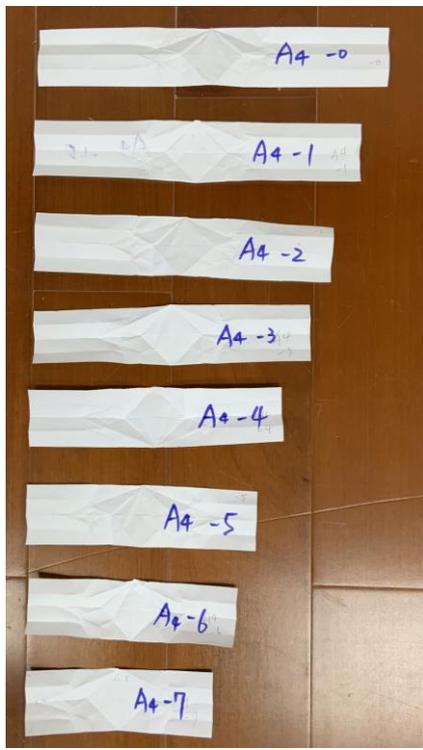
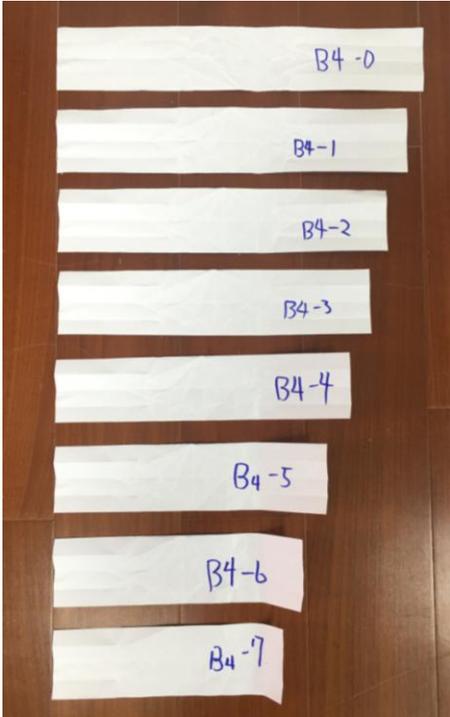
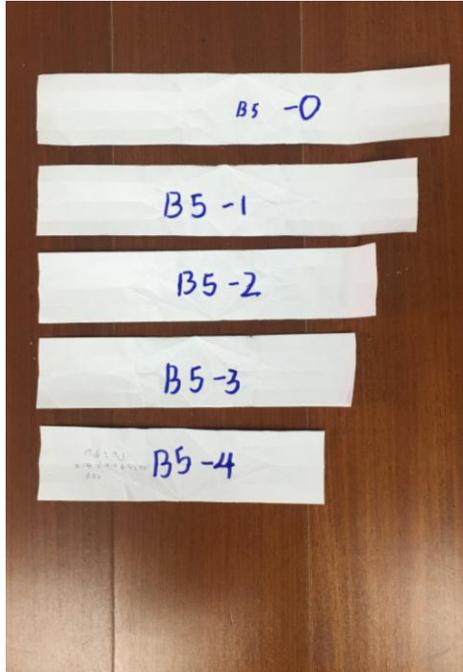
斜率	鳥嘴 1.5cm	鳥嘴 1.0cm	鳥嘴 0.5cm
A3 影印紙	9.321	7.248	5.569
B4 影印紙	9.631	7.333	6.785
A4 影印紙	13.6	10.35	8.214
B5 影印紙	13.71	11.48	9.4

研究發現

- (一) 透過實際操作發現：不論是那種尺寸的鳥嘴，翅膀越短、斜角越大。
- (二) 相同尺寸，鳥嘴越短，其斜率越小。
- (三) 相同長度的鳥嘴，紙張越大，其斜率越小。
- (四) 紙張越大，依序減去翅膀長度，最後能成功平衡的平衡鳥越多。

問題二：找出 A3、A4、B4、B5 的平衡鳥依序減短翅膀展開圖的關係

一、分別將依序減短翅膀的 A3、A4、B4、B5 尺寸大小的平衡鳥展開，排列如下：

 <p>A series of 10 white paper strips, each representing a balance bird with a different wing length. The strips are arranged vertically and labeled from top to bottom: A₃-0, A₃-1, A₃-2, A₃-3, A₃-4, A₃-5, A₃-6, A₃-7, A₃-8, and A₃-9. The strips show a progressive reduction in the length of the wings from top to bottom.</p>	 <p>A series of 8 white paper strips, each representing a balance bird with a different wing length. The strips are arranged vertically and labeled from top to bottom: A₄-0, A₄-1, A₄-2, A₄-3, A₄-4, A₄-5, A₄-6, and A₄-7. The strips show a progressive reduction in the length of the wings from top to bottom.</p>
<p>A3 平衡鳥展開圖</p>	<p>A4 平衡鳥展開圖</p>
 <p>A series of 8 white paper strips, each representing a balance bird with a different wing length. The strips are arranged vertically and labeled from top to bottom: B₄-0, B₄-1, B₄-2, B₄-3, B₄-4, B₄-5, B₄-6, and B₄-7. The strips show a progressive reduction in the length of the wings from top to bottom.</p>	 <p>A series of 5 white paper strips, each representing a balance bird with a different wing length. The strips are arranged vertically and labeled from top to bottom: B₅-0, B₅-1, B₅-2, B₅-3, and B₅-4. The strips show a progressive reduction in the length of the wings from top to bottom.</p>
<p>B4 平衡鳥展開圖</p>	<p>B5 平衡鳥展開圖</p>

二、將各尺寸平衡鳥的展開圖尺寸整理如下表

1. A3 只要長與寬的比值 ≤ 3.0 就無法再平衡了

長(cm)	42	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22
寬(cm)	7.4	7.4	7.4	7.4	7.4	7.4	7.4	7.4	7.4	7.4	7.4
比值	5.7	5.4	5.1	4.9	4.6	4.3	4.1	3.8	3.5	3.2	3.0

2. A4 只要長與寬的比值 ≤ 3.0 就無法再平衡了

長(cm)	29.7	27.7	25.7	23.7	21.7	19.7	17.7	15.7	13.7	11.7
寬(cm)	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2
比值	5.7	5.3	4.9	4.6	4.2	3.8	3.4	3.0	2.6	2.3

3. B4 只要長與寬的比值 ≤ 3.0 就無法再平衡了

長(cm)	35.3	33.3	31.3	29.3	27.3	25.3	23.3	21.3	19.3	17.3
寬(cm)	6.25	6.25	6.25	6.25	6.25	6.25	6.25	6.25	6.25	6.25
比值	5.6	5.3	5.0	4.7	4.4	4.0	3.7	3.4	3.0	2.8

4. B5 只要長與寬的比值 ≤ 3.0 就無法再平衡了

長(cm)	25	23	21	19	17	15	13	11	9
寬(cm)	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4
比值	5.7	5.2	4.8	4.3	3.9	3.4	3.0	2.5	2.0

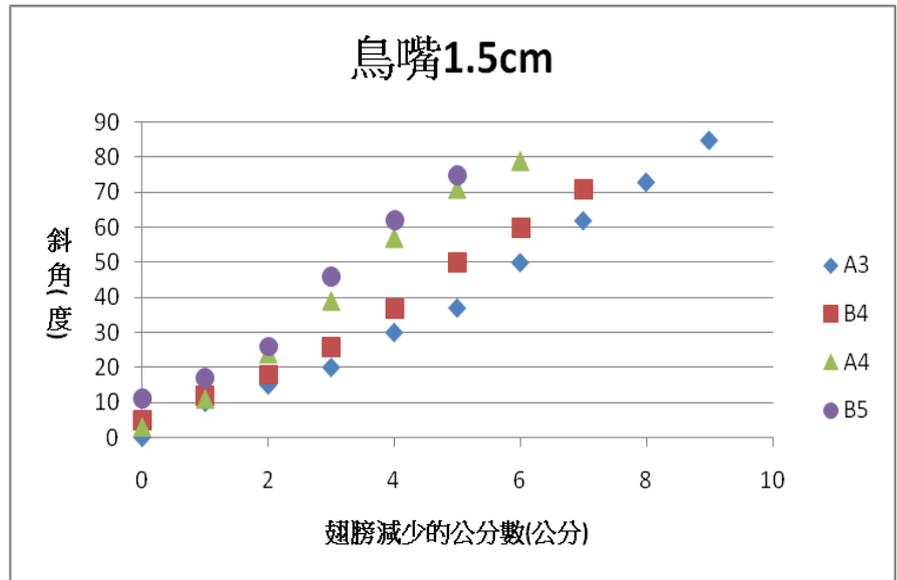
研究發現

(一) 接著我們計算平衡鳥展開圖長與寬的比例，對照之前實際測量的結果，有了以下的重要發現：只要長與寬的比值 ≤ 3.0 就無法再平衡了。

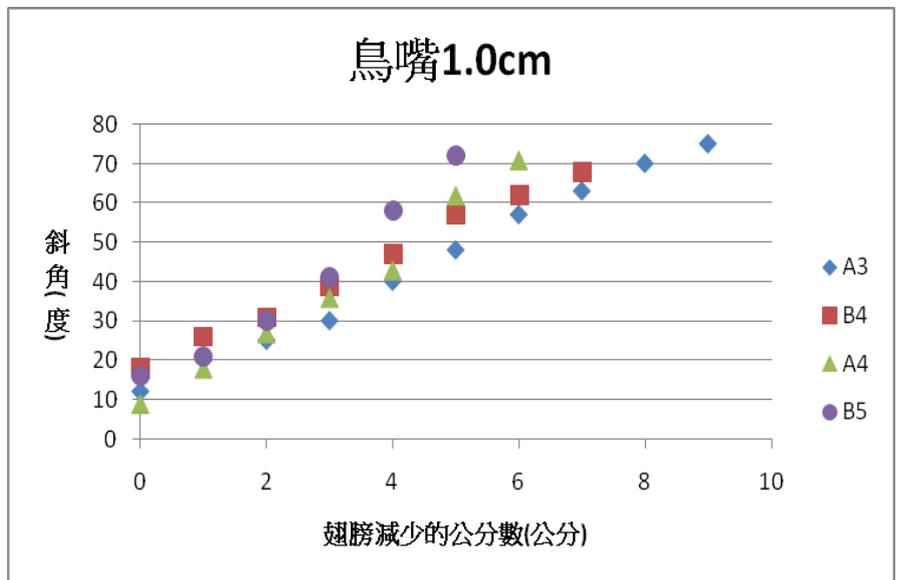
問題三：相同長度的鳥嘴與不同大小尺寸平衡鳥的關係

我們將以上的數據重新整理，把相同的鳥嘴長度放在一起，比較其斜角變化，並試圖從中找到相關的關係，其中以 X 軸為翅膀減少的公分數，Y 軸為斜角的度數，製成下列圖表，進而分析其變化。

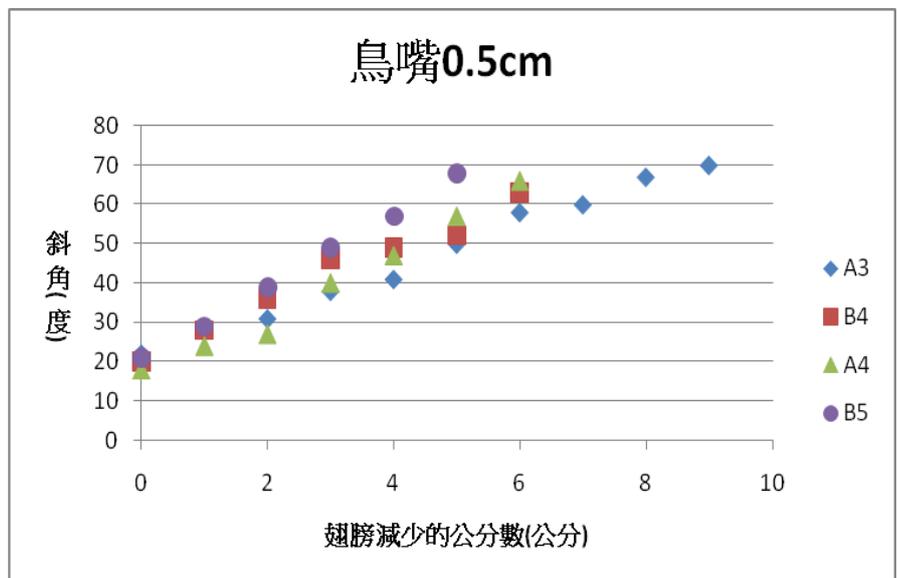
減少公分	A3	B4	A4	B5
0cm	0	5	3	10
1cm	10	12	11	17
2cm	15	18	24	26
3cm	20	26	39	46
4cm	30	37	57	62
5cm	37	50	71	75
6cm	50	60	79	×
7cm	62	71	×	×
8cm	73	×	×	×
9cm	85	×	×	×



減少公分	A3	B4	A4	B5
0cm	12	18	9	16
1cm	20	26	18	21
2cm	25	31	27	30
3cm	30	39	36	41
4cm	40	47	43	58
5cm	48	57	62	72
6cm	57	62	71	×
7cm	63	68	×	×
8cm	70	×	×	×
9cm	75	×	×	×



減少公分	A3	B4	A4	B5
0cm	22	20	18	21
1cm	28	28	24	29
2cm	31	36	27	39
3cm	38	46	40	49
4cm	41	49	47	57
5cm	50	52	57	68
6cm	58	63	66	×
7cm	60	×	×	×
8cm	67	×	×	×
9cm	70	×	×	×



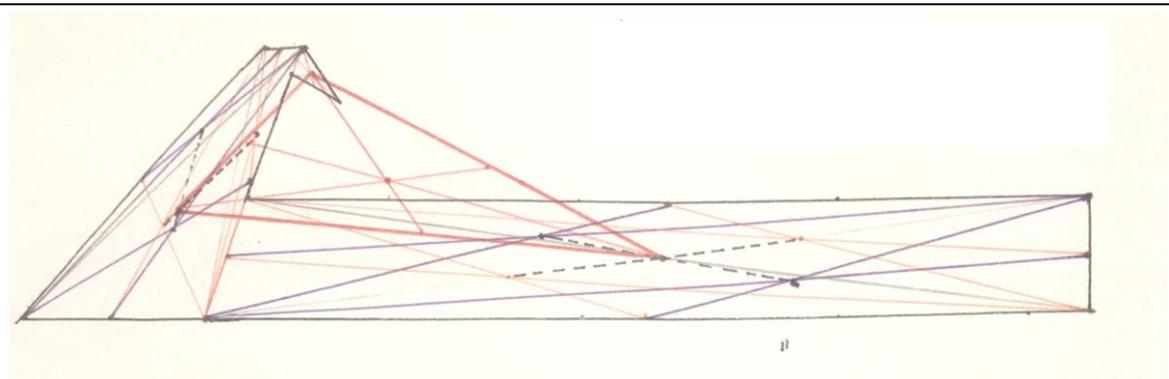
研究發現

- (一) 相同鳥嘴，依序減短翅膀，紙張越小，能成功平衡的平衡鳥越少。
- (二) 鳥嘴越小，其斜角差異性越小。

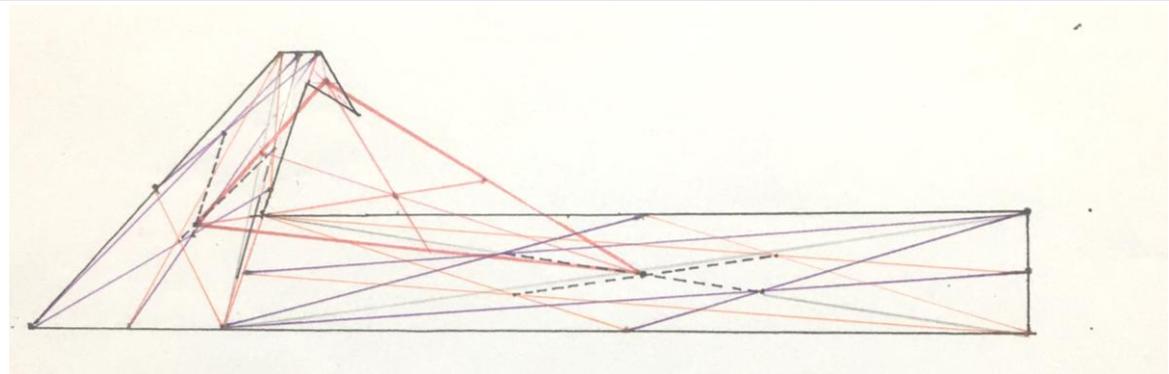
問題四：找出各種不同尺寸(A3、A4、B4、B5)的平衡鳥重心變化

找重心的方法

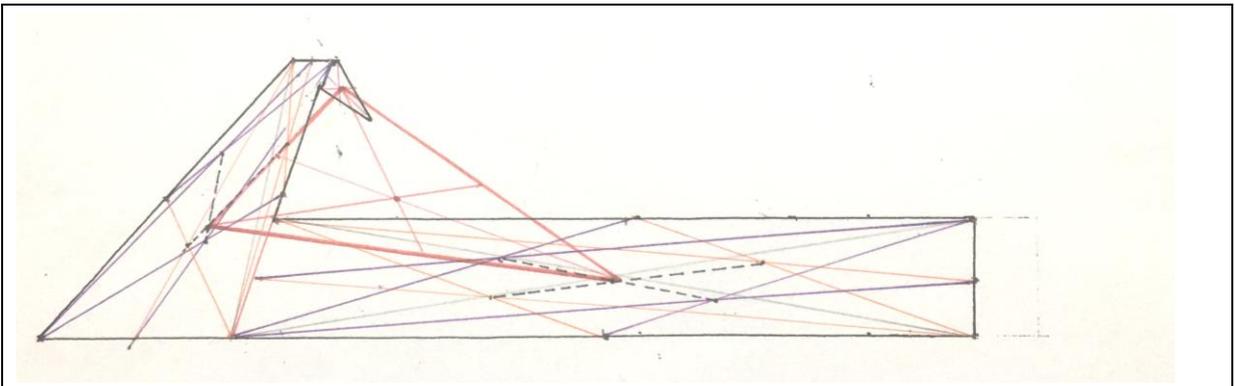
將平衡鳥分為三個部份，分別是鳥嘴、身體、翅膀，運用三角形及不規則四邊形重心的求法，分別找出這三部分的的重心，再運用這三重心連線找出平衡鳥的重心。圖中紅色的部分就是三重心的連線，三線會形成一個三角形，依據三中線的連線即可找出平衡鳥的重心，將找重心的方法整理如下（以 A3 鳥嘴 1cm 為例）：



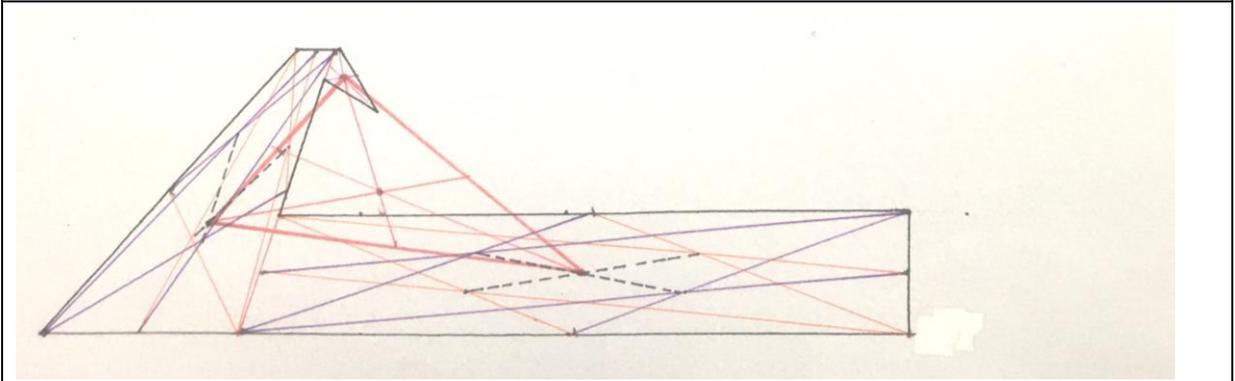
翅膀減短 0 公分



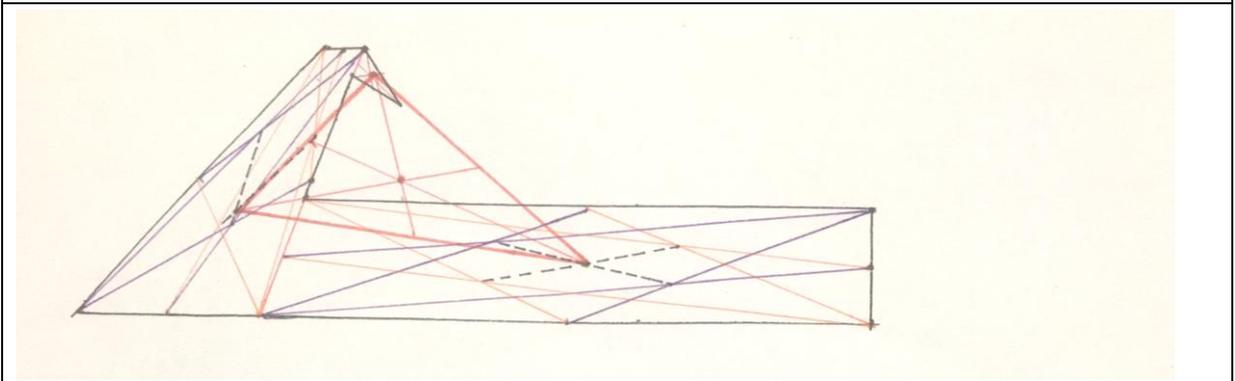
翅膀減短 1 公分



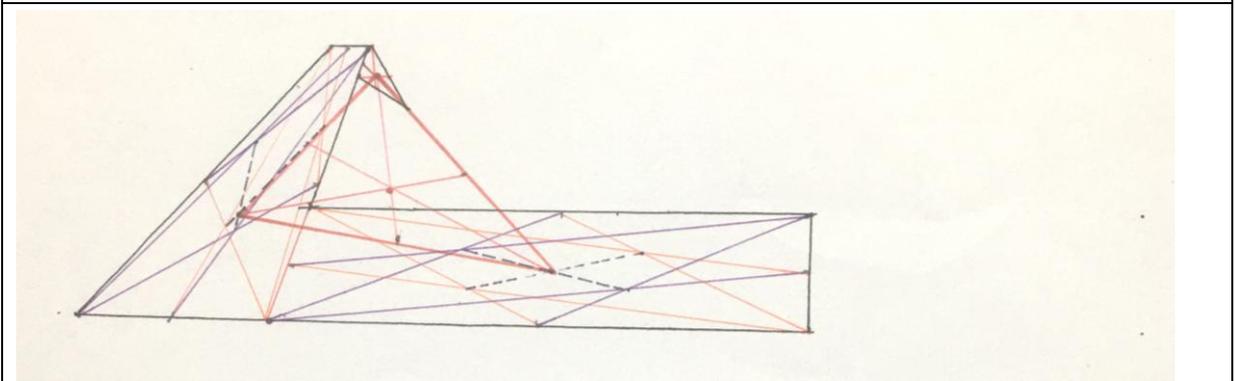
翅膀減短 2 公分



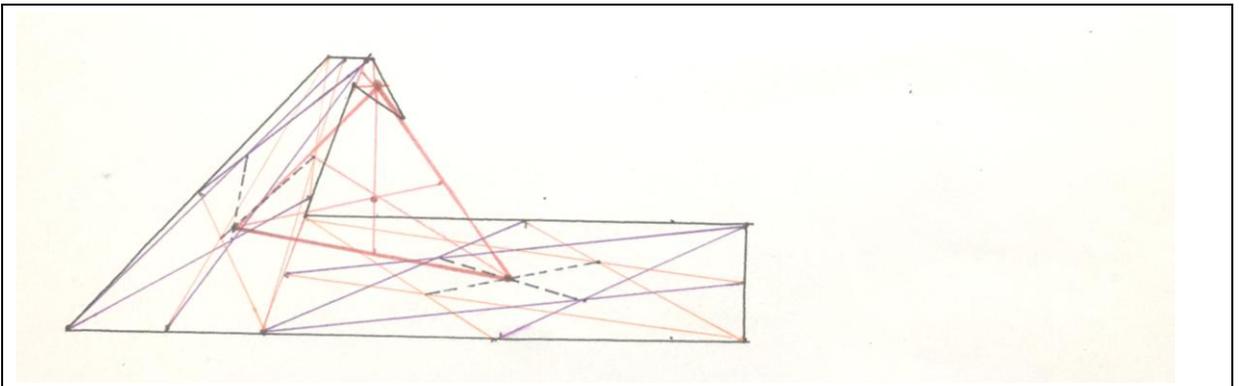
翅膀減短 3 公分



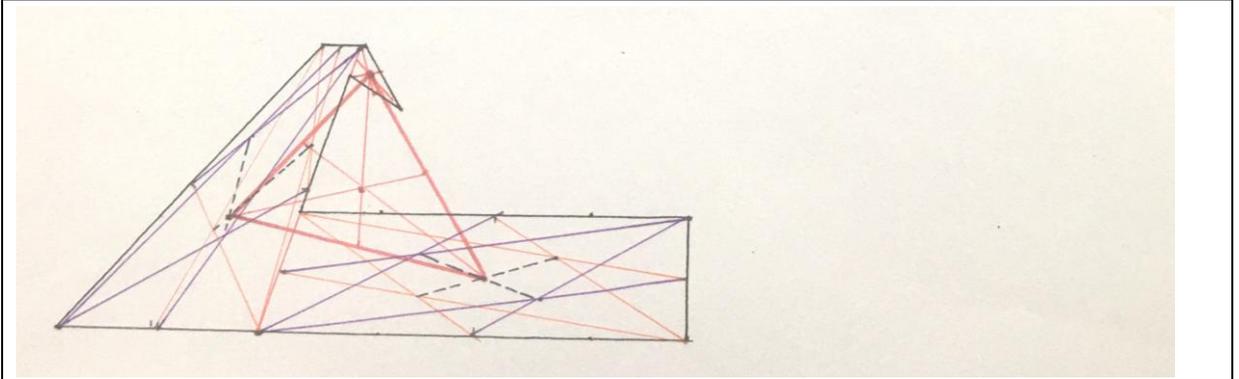
翅膀減短 4 公分



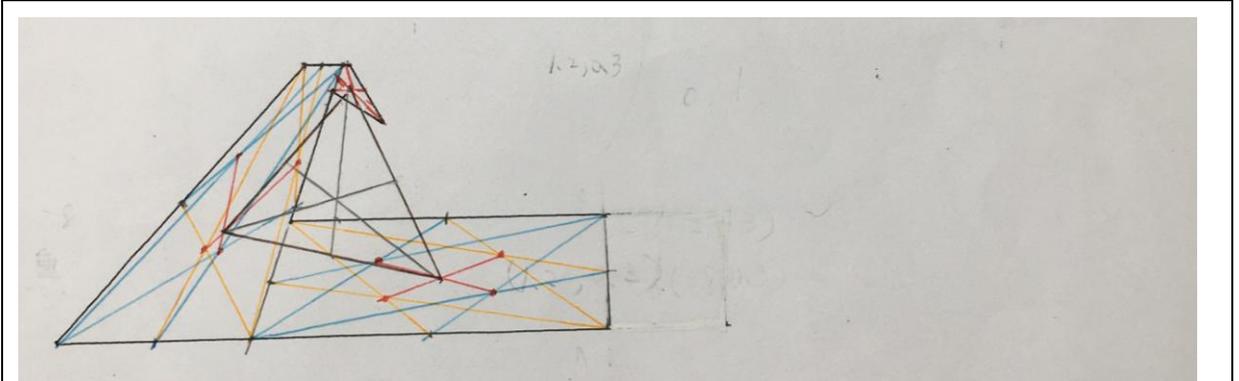
翅膀減短 5 公分



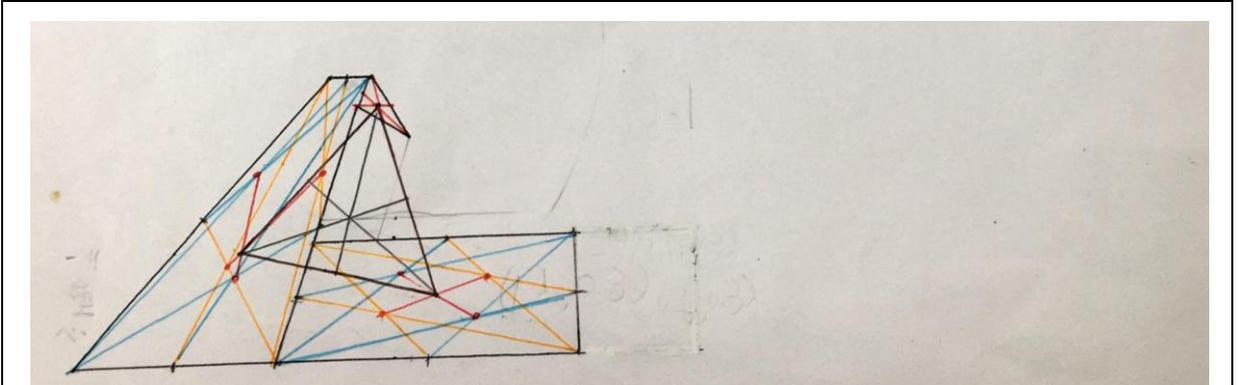
翅膀減短 6 公分



翅膀減短 7 公分

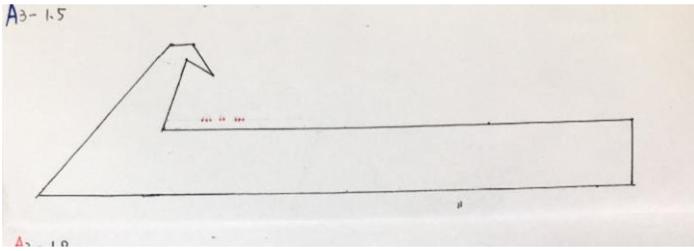
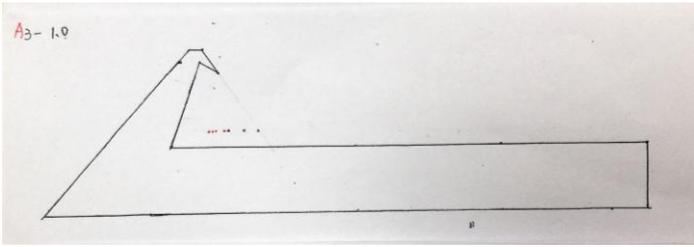
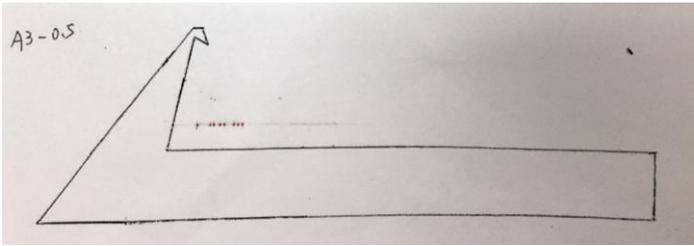


翅膀減短 8 公分



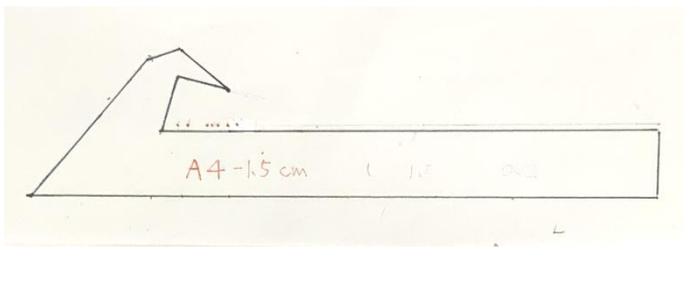
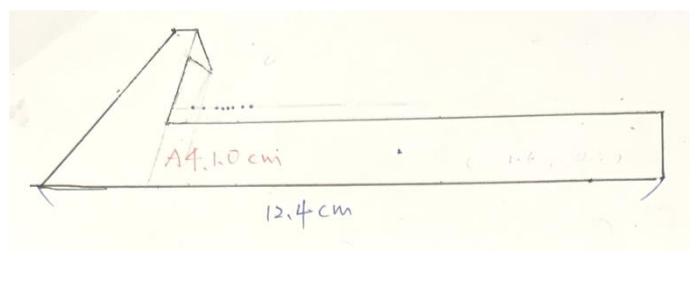
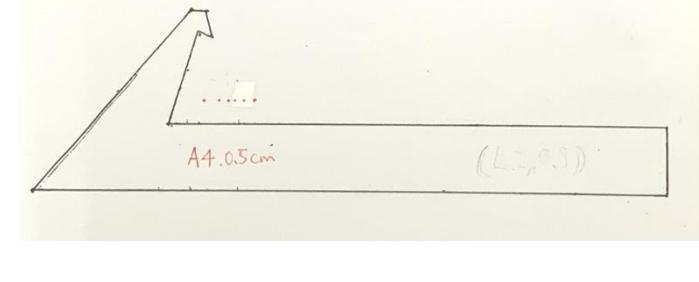
翅膀減短 9 公分

一、分別將 A3 不同鳥嘴的重心位置整理如下：

	<p>A3，鳥嘴 1.5 公分，重心的位移圖 翅膀越減越短，重心會越靠身體移動。</p>
	<p>A3，鳥嘴 1 公分，重心的位移圖 翅膀越減越短，重心會越靠身體移動。</p>
	<p>A3，鳥嘴 0.5 公分，重心的位移圖 翅膀越減越短，重心會越靠身體移動。</p>

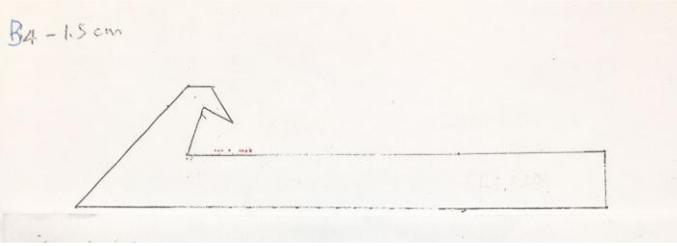
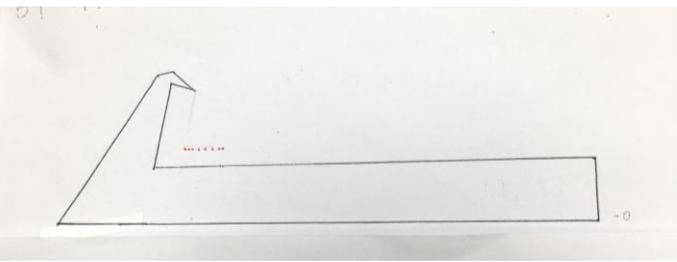
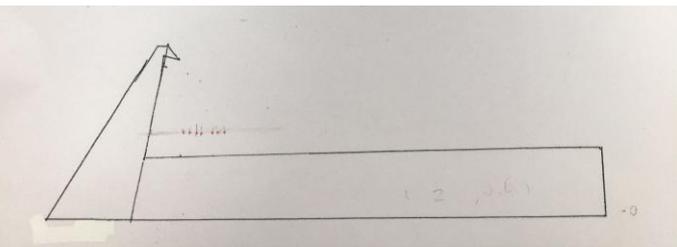
翅膀減少	A3-1.5cm 重心位置	A3-1.0cm 重心位置	A3-0.5cm 重心位置
0 公分	(2.3, 0.3)	(2.6, 0.5)	(2.5, 0.7)
1 公分	(2.2, 0.3)	(2.2, 0.5)	(2.0, 0.7)
2 公分	(2.1, 0.3)	(1.7, 0.5)	(1.9, 0.7)
3 公分	(1.7, 0.3)	(1.5, 0.5)	(1.8, 0.7)
4 公分	(1.6, 0.3)	(1.4, 0.5)	(1.5, 0.7)
5 公分	(1.3, 0.3)	(1.3, 0.5)	(1.4, 0.7)
6 公分	(1.2, 0.3)	(1.2, 0.5)	(1.2, 0.7)
7 公分	(1.1, 0.3)	(1.0, 0.5)	(1.1, 0.7)
8 公分	(0.8, 0.3)	(0.9, 0.5)	(1.0, 0.7)
9 公分	(0.6, 0.3)	(0.7, 0.5)	(0.8, 0.7)

二、分別將 A4 不同鳥嘴的重心位置整理如下：

	<p>A4，鳥嘴 1.5 公分，重心的位移圖 翅膀越減越短，重心會越靠身體移動。</p>
	<p>A4，鳥嘴 1 公分，重心的位移圖 翅膀越減越短，重心會越靠身體移動。</p>
	<p>A4，鳥嘴 0.5 公分，重心的位移圖 翅膀越減越短，重心會越靠身體移動。</p>

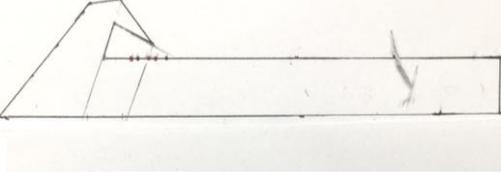
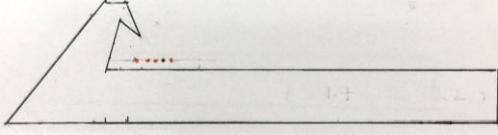
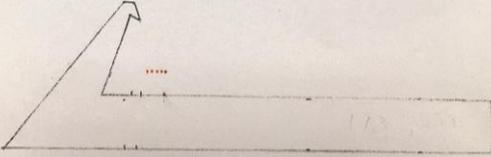
翅膀減少	A4-1.5cm 重心位置	A4-1cm 重心位置	A4-0.5cm 重心位置
0 公分	(1.5, 0.1)	(1.6, 0.3)	(1.7, 0.5)
1 公分	(1.3, 0.1)	(1.4, 0.3)	(1.5, 0.5)
2 公分	(1.1, 0.1)	(1.2, 0.3)	(1.3, 0.5)
3 公分	(1.0, 0.1)	(1.1, 0.3)	(1.2, 0.5)
4 公分	(0.9, 0.1)	(1.0, 0.3)	(1.0, 0.5)
5 公分	(0.5, 0.1)	(0.9, 0.3)	(0.7, 0.5)
6 公分	(0.4, 0.1)	(0.6, 0.3)	(0.6, 0.5)
7 公分	(0.3, 0.1)	(0.4, 0.3)	(0.5, 0.5)

三、分別將 B4 不同鳥嘴的重心位置整理如下：

	<p>B4，鳥嘴 1.5 公分，重心的位移圖 翅膀越減越短，重心會越靠身體移動。</p>
	<p>B4，鳥嘴 1 公分，重心的位移圖 翅膀越減越短，重心會越靠身體移動。</p>
	<p>B4，鳥嘴 0.5 公分，重心的位移圖 翅膀越減越短，重心會越靠身體移動。</p>

翅膀減少	B4-1.5cm 重心位置	B4-1.0cm 重心位置	B4-0.5cm 重心位置
0 公分	(1.8, 0.1)	(1.9, 0.5)	(2, 0.6)
1 公分	(1.7, 0.1)	(1.8, 0.5)	(1.8, 0.6)
2 公分	(1.6, 0.1)	(1.6, 0.5)	(1.7, 0.6)
3 公分	(1.5, 0.1)	(1.4, 0.5)	(1.4, 0.6)
4 公分	(1.2, 0.1)	(1.2, 0.5)	(1.3, 0.6)
5 公分	(1.0, 0.1)	(1.0, 0.5)	(1.1, 0.6)
6 公分	(0.9, 0.1)	(0.9, 0.5)	(0.9, 0.6)
7 公分	(0.8, 0.1)	(0.8, 0.5)	(0.8, 0.6)

四、分別將 B5 不同鳥嘴的重心位置整理如下：

	<p>B5，鳥嘴 1.5 公分，重心的位移圖 翅膀越減越短，重心會越靠身體移動。</p>
	<p>B5，鳥嘴 1 公分，重心的位移圖 翅膀越減越短，重心會越靠身體移動。</p>
	<p>B5，鳥嘴 0.5 公分，重心的位移圖 翅膀越減越短，重心會越靠身體移動。</p>

翅膀減少	B5-1.5cm 重心位置	B5-1.0m 重心位置	B5-0.5cm 重心位置
0 公分	(1.3, 0)	(1.4, 0.2)	(1.3, 0.5)
1 公分	(1.1, 0)	(1.2, 0.2)	(1.2, 0.5)
2 公分	(0.9, 0)	(1.1, 0.2)	(1.1, 0.5)
3 公分	(0.7, 0)	(0.9, 0.2)	(1.0, 0.5)
4 公分	(0.6, 0)	(0.7, 0.2)	(0.9, 0.5)
5 公分	(0.4, 0)	(0.5, 0.2)	(0.8, 0.5)

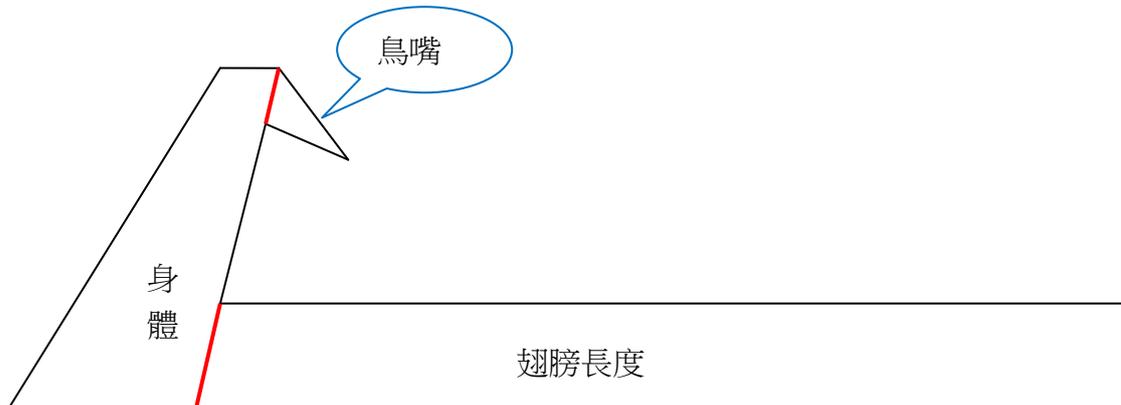
研究發現

- (一) 依序減短翅膀，重心位置會水平往身體方向移動，斜角也會越大，當重心碰到平衡鳥的身體就無法平衡了。
- (二) 翅膀的寬度越寬、長度越長，會使重心往下往右移動，越能使平衡鳥平衡。
- (三) 重心的垂直位置會因為鳥嘴的長短而改變，鳥嘴越長，重心越低，越容易平衡。

(四) 平衡鳥的重心落在它的鳥嘴下方，故當鳥嘴被頂於任一支點上時，整隻平衡鳥就能達到穩定平衡的狀態。

問題五：找出 A3、A4、B4、B5 不同尺寸的平衡鳥的身體、翅膀面積的神奇比例

面積計算方法



鳥嘴面積：底×高÷2

翅膀長度面積：梯形面積 = (上底 + 下底) × 高 ÷ 2

身體面積：任意四邊形面積 = 分成兩個三角形後，計算兩個三角形面積，最後相加

一、分別整理 A3 (鳥嘴 1.5cm、鳥嘴 1.0cm、鳥嘴 0.5cm) 的各組成面積

A3-1.5CM

鳥嘴	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33
身體	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3
翅膀	26.98	25.08	23.18	21.28	19.38	17.48	15.58	13.68	11.78	9.88	7.98	7.98
	可平衡	可平衡	可平衡	不可平衡								

單位面積(cm²)

A3-1.0CM

鳥嘴	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12
身體	8.4	8.4	8.4	8.4	8.4	8.4	8.4	8.4	8.4	8.4	8.4	8.4
翅膀	26.98	25.08	23.18	21.28	19.38	17.48	15.58	13.68	11.78	9.88	7.98	7.98
	可平衡	可平衡	可平衡	不可平衡								

單位面積(cm²)

A3-0.5CM

鳥嘴	0.08	0.08	0.8	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
身體	9.35	9.35	9.35	9.35	9.35	9.35	9.35	9.35	9.35	9.35	9.35	9.35
翅膀	26.98	25.08	23.18	21.28	19.38	17.48	15.58	13.68	11.78	9.88	7.98	7.98
	可平衡	可平衡	可平衡	不可平衡								

單位面積(cm²)

二、分別整理 A4 (鳥嘴 1.5cm、鳥嘴 1.0cm、鳥嘴 0.5cm) 的各組成面積

A4-1.5CM

鳥嘴	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
身體	3.98	3.98	3.98	3.98	3.98	3.98	3.98	3.98	3.98	3.98	3.98	3.98
翅膀	13.065	11.765	10.465	9.165	7.865	6.565	5.265	3.965	2.665	1.365	0.065	0.065
	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	不可平衡	不可平衡

單位面積(cm²)

A4-1.0CM

鳥嘴	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
身體	4.185	4.185	4.185	4.185	4.185	4.185	4.185	4.185	4.185	4.185	4.185	4.185
翅膀	13.065	11.765	10.465	9.165	7.865	6.565	5.265	3.965	2.665	1.365	0.065	0.065
	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	不可平衡	不可平衡

單位面積(cm²)

A4-0.5CM

鳥嘴	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075
身體	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5
翅膀	13.065	11.765	10.465	9.165	7.865	6.565	5.265	3.965	2.665	1.365	0.065	0.065
	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	不可平衡	不可平衡

單位面積(cm²)

三、 分別整理 B4（鳥嘴 1.5cm、鳥嘴 1.0cm、鳥嘴 0.5cm）的各組成面積

B4-1.5CM

鳥嘴	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27
身體	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6
翅膀	18.36	16.76	15.16	13.56	11.96	10.36	8.76	7.16	5.56	5.56
	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	不可平衡	不可平衡

單位面積(cm²)

B4-1.0CM

鳥嘴	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075
身體	6.16	6.16	6.16	6.16	6.16	6.16	6.16	6.16	6.16	6.16
翅膀	18.36	16.76	15.16	13.56	11.96	10.36	8.76	7.16	5.56	5.56
	可平衡	不可平衡	不可平衡							

單位面積(cm²)

B4-0.5CM

鳥嘴	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
身體	6.52	6.52	6.52	6.52	6.52	6.52	6.52	6.52	6.52	6.52
翅膀	18.36	16.76	15.16	13.56	11.96	10.36	8.76	7.16	5.56	5.56
	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	不可平衡	不可平衡

單位面積(cm²)

四、 分別整理 B5（鳥嘴 1.5cm、鳥嘴 1.0cm、鳥嘴 0.5cm）的各組成面積

B5-1.5CM

鳥嘴	0.225	0.225	0.225	0.225	0.225	0.225	0.225	0.225	0.225	0.225
身體	2.85	2.85	2.85	2.85	2.85	2.85	2.85	2.85	2.85	2.85
翅膀	9.35	8.25	7.15	6.05	4.95	3.85	2.75	1.65	0.55	0.55
	可平衡	不可平衡	不可平衡	不可平衡						

單位面積(cm²)

B5-1.0CM

鳥嘴	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075
身體	2.99	2.99	2.99	2.99	2.99	2.99	2.99
翅膀	9.35	8.25	7.15	6.05	4.95	3.85	2.75
	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	不可平衡

單位面積(cm²)

B5-0.5CM

鳥嘴	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
身體	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05
翅膀	9.35	8.25	7.15	6.05	4.95	3.85	2.75
	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	可平衡	不可平衡

單位面積(cm²)

研究發現

(一) 翅膀的面積減到比身體面積還小時即無法平衡了，可見翅膀長短在平衡鳥平衡因素中，佔了相當重要的地位。

陸、研究結果

- 一、 透過實際操作發現：不論是哪種尺寸的鳥嘴，翅膀越短、斜角越大。
- 二、 相同鳥嘴，依序減短翅膀，紙張越小，能成功平衡的平衡鳥越少。
- 三、 不管任何尺寸的影印紙，只要長與寬的比值 ≤ 3.0 就無法再平衡了。
- 四、 依序將翅膀減短，重心位置會水平往身體方向移動，當重心移至平衡鳥的身體就無法平衡了。
- 五、 翅膀的面積減到比身體面積還小時即無法平衡了，可見翅膀長短在平衡鳥平衡因素中，佔了相當重要的地位。

柒、研究心得

我們這次研究的主題是「持之以衡－平衡鳥重心的延伸與探討」，我們利用了生活中廢棄的影印紙，折出不同的平衡鳥，再一一去探討影響平衡鳥平衡的因素，最後運用數學原理解釋為何鳥嘴長短以及翅膀長短會影響平衡鳥的斜角變化，沒想到簡單的一張廢棄不用的影印紙隱藏了這麼多神奇的奧秘，感謝兩位辛苦的老師帶領我們一步一步地去尋找生活中的數學之美，並利用數學解決問題。因為參加科展，讓我們更加喜愛數學。

在這一年的研究過程中，我們常常因為碰到瓶頸而焦慮，也常常意見不合而起爭執，但也因為這樣讓我們從中學會團隊合作及彼此包容，這些都是難得可貴的，也因為如此，讓我們的感情更加融洽，團隊也變得更有默契，一起完成了這項研究。「團結就是力量」，謝謝數學團隊的所有夥伴，因為有你們的支持與陪伴，我們才能走到最後。仔細觀察，便能發現，生活中充滿數學，希望大家也能跟我們一起玩數學！

捌、未來研究方向

未來可以搭配資訊課程的 3D 列印，製作立體的平衡鳥，3D 列印耗時且需要精準計算，在我們這次研究的基礎下，相信可以結合資訊科技的應用，拓展數學知識的應用。

玖、參考資料

康軒出版社(2020)。國小數學第九冊 第八單元 面積。

南一出版社(2020)。國中數學第五冊 3-2 三角形的外心、內心與重心。

翰林出版社（2016）。高中數學第一冊 2-1 簡單多項式函數及其圖形。

翰林出版社(2020)。國中數學第五冊 3-2 三角形與多邊形的心。

翰林出版社(2020)。高中物理第三冊 3-2 力矩與轉動平衡。